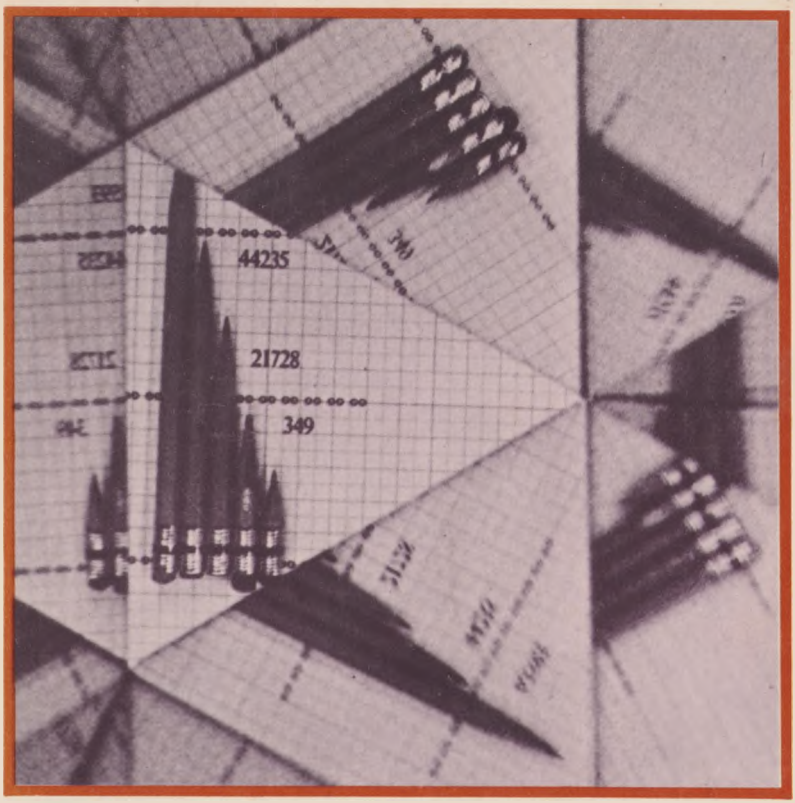


Oskar Lange

Economía política

Fondo de Cultura Económica / Serie de Economía

ECONOMÍA POLÍTICA
[II]

Traducción de

ELZBIETA G. DE KERLOW

OSKAR LANGE

Economía Política

II

FONDO DE CULTURA ECONÓMICA
MÉXICO

Primera edición en polaco, 1968
Primera edición en español, 1981
Primera reimpresión, 1982
Segunda reimpresión, 1987

CC BY NC SA

Título original:
Ekonomia Polityczna, Vol. II
© 1968, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Varsovia

D. R. © 1981, FONDO DE CULTURA ECONOMICA
D. R. © 1987, FONDO DE CULTURA ECONOMICA, S. A. de C. V.
Av. de la Universidad 975; 03100 México, D.F.

ISBN 968-16-0557-8 (T. II)
ISBN 968-16-0558-6 (General)

Impreso en México

NOTA DEL EDITOR PARA LA PRIMERA EDICION POLACA

DEL prólogo escrito para un libro inconcluso —truncado irrevocablemente por la muerte del autor— el lector espera, por lo menos, un resumen general de lo que el libro habría de contener según el propósito original.

Ahora bien, ¿disponemos acaso del material que permita satisfacer ese deseo, suficientemente justificado por la excepcional importancia de la *Economía Política*, obra que Oskar Lange consideró como un resumen singular de su bagaje creativo?

Desafortunadamente, aparte de los cuatro capítulos que forman este segundo tomo y de los cuatro borradores del plan general incluidos en los *anexos*, no se ha encontrado hasta la fecha entre los papeles inéditos dejados por el profesor Lange ningún fragmento adicional ni plan preciso del texto que habría de seguir al primer tomo de su *Economía Política*. Los prefacios escritos por el autor para la primera y segunda edición del primer tomo y el pequeño volumen aparecido en la colección «Omega», titulado *El hombre y la técnica en la producción*, es todo el material escrito disponible en el que pueda fundamentarse este breve comentario sobre la relación entre la obra planeada y el texto que publicamos.

De estos escasos documentos se deduce el hecho de que Oskar Lange realizaba, consecuentemente, su primitivo plan de elaboración de la *Economía Política*, que consistía en el traslado de los problemas metodológicos más comunes, a través de un análisis de las leyes económicas generales, a la problemática de las respectivas formaciones socioeconómicas, en especial del capitalismo y del socialismo. En el transcurso del trabajo se producían, es cierto, cambios esenciales, pero éstos iban encaminados a la ampliación de la parte general; por lo tanto, a una enfatización todavía más fuerte de aquella característica de la obra que la hiciera destacar de entre otros intentos marxistas en la presentación integral de la problemática de la economía política. Para Lange, las leyes económicas propias de las respectivas formaciones socioeconómi-

cas no constituían un punto de partida que fuese precedido tan sólo por una breve introducción acerca del objeto y el método de la economía, sino un punto —valga la expresión— final, cuyo logro requería una preparación escrupulosa de un «instrumentárium» metodológico y un análisis omnímodo de las regularidades generales de los procesos económicos. Lange consideraba que sólo basándose en tal fundamento podían entenderse debidamente los rasgos específicos y las regularidades de las respectivas formaciones, sobre todo las del socialismo, sus perspectivas de desarrollo en relación al capitalismo contemporáneo y los problemas del «tercer mundo».

La idea de exponer «la totalidad de los problemas más importantes de la economía política» nació en los años 1956 y 1957. Lange consideraba al principio —como atestigua el primitivo plan integral— que su propósito podía realizarse dentro del marco de un solo tomo que constara de tres partes: *Los principios generales, La economía política del capitalismo* y *La economía política del socialismo.* En el curso del trabajo resultó que la problemática prevista para un solo capítulo I *(Economía Política como ciencia)* requería un extenso tomo independiente. La resonancia que produjo el primer tomo de *Economía Política* en el país y en el extranjero prueba que tal solución era provechosa y necesaria.

El volumen II tenía como propósito continuar con el análisis de los problemas generales; sin embargo, ya no tanto desde el punto de vista metodológico como desde el ángulo de dos fundamentales grupos básicos de los problemas de la economía: la teoría de la reproducción, sobre todo en lo que se refiere a las relaciones sustanciales o concretas, y la teoría de la producción mercantil, que, en determinadas condiciones, se convierte en una forma de manifestación de las regularidades sustanciales o concretas del proceso de reproducción. Sólo basándose en el análisis de esos dos grandes grupos de problemas Lange creía posible una presentación de la teoría económica de las formaciones sociales, que había de constituir el final del segundo tomo, y —como puede deducirse de los planes publicados en el anexo— su lugar central lo habían de ocupar los problemas de la creación y la distribución del excedente económico (plusproducto) y, por consiguiente, la problemática de las estructuras sociales, el papel de la superestructura y el tipo de estímulos económicos propios de las respectivas formaciones.

Los cuatro capítulos del segundo tomo abarcan, por lo tanto, el primero de los tres grupos de problemas que había de constituir

el contenido del segundo tomo. Presentan, fundamentalmente, las cuestiones de la reproducción, poniendo un especial énfasis en el análisis preciso de los nexos recíprocos entre todos los elementos del proceso. El enfoque cibernético, planeado en un suplemento especial (en cuyo lugar se ofrece al lector un fragmento de *Introducción a la cibernética económica),* tenía como objeto dar una idea acerca de la perspectiva del aprovechamiento de los nuevos instrumentos para investigar dichos nexos. No han sido, en cambio, desarrollados, ni siquiera de manera superficial, los dos restantes grupos de problemas: la producción mercantil y la ley de los valores, y la teoría de las formaciones sociales. Se tiene noticias únicamente, a través de algunas entrevistas y material epistolar, que en la elaboración de la problemática de la producción mercantil Lange había conferido una gran importancia a las concepciones teóricas contenidas en el libro de Piero Sraffa *Producción de mercancía por medio de mercancías* (traducción al polaco, Varsovia, 1965).

Si se tratara tan sólo de dar una respuesta formal a la pregunta: ¿en qué relación queda el texto anunciado con respecto a la totalidad de la obra planeada?, podríamos dejar de profundizar más en este asunto y responder que, desde un punto de vista exclusivamente cuantitativo, disponemos de un poco menos de la mitad del trabajo. Sin embargo, tratándose de *Economía Política,* de Oskar Lange, el sentido de la definición «obra inconclusa» es más profundo y rebasa los criterios cuantitativos.

Hay, por lo menos, dos cuestiones que merecen ser realzadas desde este punto de vista.

La primera se vincula con el concepto de *exposición* que empleó el autor en el prólogo para la primera edición del libro. *Exposición de los problemas más importantes de la economía política* sugiere que podría tratarse ahí de una presentación sistemática de conceptos y soluciones totalmente cristalizados, ya existentes. Sin embargo, no fue así. Tanto el proceso de ampliación de la problemática, arriba mencionado, como la evolución de las concepciones respectivas, demuestran sin lugar a dudas que el proceso de escribir (conferencia o exposición en forma escrita) fue en realidad un proceso de creación en el sentido más amplio de la palabra, fue un proceso de planteamiento de problemas y de soluciones para los mismos, un proceso de búsqueda y, a medida que éstos presentaban complicaciones, cambiaba a veces la perspectiva. El análisis de los problemas presentados en el segundo plano conducía muy a menudo a la concisión de los conceptos examinados en las partes anteriores.

Así, por ejemplo, la categoría fundamental de relaciones de producción la analiza Lange en el primer tomo. Ahí es también donde discute conceptos relacionados con ello, tales como: el modo de producción, las relaciones de distribución, las relaciones económicas y la base económica. Durante el nuevo estudio acerca del complejo de problemas que integran el primer capítulo del segundo tomo, titulado «El proceso social de producción y reproducción», Lange introduce, sin embargo, un nuevo concepto —el de las relaciones de cooperación—, clasificando de esta manera las relaciones de producción en relaciones de cooperación y en relaciones de propiedad. No cabe la menor duda que esto requiere una nueva ojeada a todos los conceptos arriba mencionados.

Otro ejemplo: el problema de los vínculos de la praxeología con la economía ocupa en el primer tomo de la obra de Lange uno de los lugares centrales. Pero no fue sino hasta elaborar el segundo tomo cuando Lange utilizó la praxeología para interpretar algunas leyes que hasta hacía poco fueron consideradas por algunos economistas como leyes universales de la técnica; por otros, en cambio, rechazadas teóricamente, precisamente por la razón de que en el desarrollo de la técnica no encontraban justificación.

La interpretación praxeológica de dichas leyes permitió no sólo esclarecer la falsa interpretación que persistió durante muchas décadas, sino que también inclinó al autor a formular ciertas concepciones propias. Entre otras cosas, esto ha encontrado expresión en algunos suplementos para las siguientes ediciones del primer tomo, en especial en la concepción praxeológica de los multiplicadores de Lagrange «como índices de sensibilidad de las respectivas limitaciones de balance». Esto lanza una nueva luz a la cuestión de técnica-balance de las leyes de producción.

Así hubiese ocurrido seguramente con otros problemas que habrían recibido una explicación un tanto diferente a medida que aumentara la división de criterios sobre las demás cuestiones que figuran en el índice del libro. El mismo autor se daba perfecta cuenta de esta situación al subrayar que dentro del marco del contenido de los siguientes tomos había de plantearse el problema de «una nueva revisión del primer tomo y de una modificación radical del mismo».

El otro aspecto del carácter inconcluso de la obra de Lange parece ser aún más trascendental. Sucede que las siguientes partes de la obra iniciada son tan sólo un enfoque o proyección más detallados, ampliación, complementación de los conceptos contenidos en

sus primeras partes. Pero ocurre también —al igual que en las ciencias sociales— que las partes respectivas pueden ser comprendidas plenamente sólo apoyándose en la totalidad, y su lugar y papel son determinados por esa totalidad. Esto es lo que ocurre seguramente en la obra de Lange, lo cual se deduce, entre otras cosas, del hecho de pretender darle el carácter de «una monografía sistemática de la materia». Cuán importante resulta ser en este contexto la afirmación del profesor Lange de que a la cristalización definitiva de la idea del autor «ha contribuido la convicción de que muchas de las disputas o desavenencias en las discusiones y las polémicas en el campo de la economía política sólo pueden resolverse apoyándose en una enseñanza sistemática de dicha ciencia; las respectivas cuestiones económicas se enlazan formando un todo y resulta difícil estudiarlas por separado». Es cierto que el primer tomo «constituye una totalidad cerrada que trata de las bases generales de la ciencia de la economía política», pero en relación a la totalidad que se ha propuesto forma apenas su fundamento. Es un conjunto sistematizado de conceptos generales y una exposición o enseñanza de los métodos de investigación, cuyo sentido, importancia y utilidad habían de ser verificados en forma definitiva durante el proceso del análisis de la realidad capitalista y socialista. La sistematización de los conceptos y los métodos, a la que está dedicado principalmente el primer tomo, y en parte también el segundo, había de servir como un medio para lograr el objetivo: el análisis de la contemporaneidad. Eso el autor ya no alcanzó a realizarlo. Todo esto, una vez más, demuestra lo grande de la pérdida que ha sufrido la ciencia con la muerte de Oskar Lange. También ensalza la dificultad y a la vez la necesidad de continuar con la tarea iniciada por el autor.

* * *

La editorial ha tratado de respetar, de la manera más fiel posible, el texto del autor, introduciendo tan sólo mínimas correcciones de lenguaje y de redacción. Estas abarcan, entre otras cosas, a los errores observados en las fórmulas matemáticas, resultantes probablemente de los errores de máquina o quizá debidos a la falta de verificación por parte del autor del texto de su trabajo. Hemos dejado sin cambios los pasajes en el texto y las notas en los que el autor estipulaba que a ciertas cuestiones regresaría en los siguientes capítulos del libro y en el suplemento matemático *El análisis cibernético del proceso de reproducción*, capítulos que Lange ya no pudo escribir.

Además, se han actualizado las citas del autor, basándose en las ediciones más recientes, excepto algunas notas de las obras de Marx que, conforme a los deseos del autor, se han publicado con las correcciones del profesor Lange.

Como ya hemos mencionado, se ha incluido en el texto un anexo que integra: el prólogo del trabajo publicado en la colección «Omega» bajo el título «El hombre y la técnica en la producción»; los respectivos fragmentos de *Introducción a la cibernética económica,* que aparecen como suplemento del cuarto capítulo de esta obra, en lugar del análisis cibernético del proceso de reproducción, iniciado por el autor pero desgraciadamente inacabado. Y, finalmente, el texto de los índices de los tres tomos que se proponía escribir el doctor Lange para dar cima a esta obra, y que dejó entre sus borradores manuscritos.

A la presente segunda edición de la obra se han introducido correcciones en las fórmulas matemáticas de las páginas 92 y 126-127. La verificación de las fórmulas fue hecha por el licenciado Franciszek Kubiczek, por lo cual la Redacción le expresa su más profundo agradecimiento.

CAPÍTULO I

EL PROCESO SOCIAL DE PRODUCCION Y REPRODUCCION

I

La actividad económica abarca la producción y distribución de los objetos materiales que satisfacen necesidades humanas. La producción y distribución constituyen los dos aspectos, ligados estrechamente entre sí, de la actividad económica que continuamente se repiten y que, por tanto, se convierten en el proceso productivo creador de bienes y productos que se convierten en objeto de distribución entre los miembros de la sociedad. Sin embargo, la distribución influye en las condiciones de producción y, por tanto, en el proceso productivo, en su carácter y en su curso. De esta manera, los dos aspectos del proceso económico constituyen un todo indivisible.

Tanto durante la producción, como durante la distribución, se entablan entre las personas relaciones sociales: las relaciones de producción y las relaciones de distribución, que forman un todo y se denominan relaciones económicas. En la producción el hombre actúa sobre la naturaleza y él mismo se va conformando durante este proceso, se va educando. Como lo afirma la concepción materialista de la historia, el proceso de influencia mutua del hombre y la naturaleza durante la producción crea estímulos que conducen a cambios ininterrumpidos en las fuerzas productivas de la sociedad y, como consecuencia, conducen también a cambios en las relaciones económicas y en otras relaciones sociales entre los hombres. Dichos estímulos son una fuente de desarrollo social. Por eso, en la exposición de las leyes sociales que rigen el proceso económico debemos comenzar por el análisis del proceso de producción.

La producción constituye una actividad humana consciente y dirigida para adaptar los recursos y las fuerzas de la naturaleza a las necesidades del hombre. Esto se efectúa mediante la extracción de lo que la naturaleza posee, mediante la elaboración y transforma-

ción de sus características físicas, químicas y biológicas; mediante el desplazamiento de los objetos en el espacio, y mediante la conservación de éstos en el tiempo. Esta actividad tiene carácter social, porque se efectúa en condiciones de convivencia entre los hombres, durante la cual las acciones de diferentes individuos se unen, se complementan, se cruzan y también se contraponen. Dicha actividad se repite constantemente. Por eso hablamos de proceso de producción y, tomando en cuenta su carácter social, *de proceso social de producción.*

En el proceso social de producción se hacen presentes ciertas regularidades, emergen ciertas leyes. Estas leyes son en parte resultado de la integración recíproca del hombre y la naturaleza que se manifiesta durante el proceso productivo. En parte, son resultado de las relaciones económicas, sobre todo las de producción, en el marco de las cuales se efectúa el proceso productivo. El primer tipo de leyes está constituido por los vínculos o nexos que existen y se repiten siempre entre las acciones y las funciones respectivas de que se compone el proceso productivo. Estos vínculos se forman como resultado de las características materiales de dicho proceso. Tales características corresponden a la tecnología empleada en la producción, a los medios utilizados y los productos creados y, finalmente, a las propiedades materiales que aparecen durante el proceso de producción como consecuencia de las acciones humanas, es decir, del trabajo. A medida que la producción se convierte en una actividad racional las leyes qué surgen en ella también se vuelven resultado de la aplicación en el proceso productivo de los principios praxeológicos de acción, que constituyen una concretización de esos principios, adaptada a las características materiales de dicho proceso.

Las leyes mencionadas, que designaremos con el nombre de *técnicas y de balance de la producción* [1] son, al igual que el resto de las leyes económicas, producto del desarrollo social, puesto que las propiedades materiales del proceso de producción dependen del estado de las fuerzas productivas de la sociedad, el cual es, a su vez, resultado del desarrollo social. Como sabemos, el desarrollo de las fuerzas productivas introduce en el proceso de producción cada vez nuevas propiedades materiales, enriquece el potencial de esas

[1] Ver O. LANGE, *Economía Política*, t. I, F. C. E., México, 1966, pp. 58-59 y 63-65. Las leyes tecnológicas de producción abarcan también algunas reglas de carácter praxeológico que están directamente unidas con las propiedades materiales del proceso de producción.

propiedades con nuevas alternativas. Por eso, junto a las leyes universales que se presentan en cada escalón del desarrollo de las fuerzas productivas —siempre y cuando se trate de un proceso de producción continuo—, surgen al paso con el desarrollo de las fuerzas productivas nuevas leyes de carácter más específico y evolucionado. De hecho, estas leyes no dejan de actuar durante la transición de una formación social a otra y se enriquecen solamente al aparecer en variantes más desarrolladas y más minuciosas, correspondientes al desarrollo de las fuerzas productivas en una nueva formación social. Sucede así debido a que dichas leyes no son resultado directo de las relaciones económicas, sino que están ligadas a las propiedades materiales del proceso de producción, como una interacción recíproca entre el hombre y la naturaleza, y, por lo tanto, dependen del estado de las fuerzas productivas.

El carácter antes mencionado de las leyes técnicas y de balance de la producción hace que el análisis de las mismas se pueda realizar más eficazmente en las condiciones del más alto desarrollo de las fuerzas productivas que se ha logrado hasta ahora [2]; es decir, en las condiciones en que aparecen sus más ricas y desarrolladas variantes. A la luz de este análisis se puede después investigar la acción de esas leyes en las condiciones en que las fuerzas productivas se hallan en estado de menor desarrollo. Se puede aplicar aquí la expresión de Marx según la cual «la anatomía del hombre es la clave para entender la del mono» [3], y que los embriones de las formas superiores de desarrollo —que aparezcan en un grado inferior del mismo— sólo pueden comprenderse cuando las formas superiores de desarrollo ya son conocidas. Por esta razón, vamos a examinar sólo el proceso social de producción según las condiciones del estado actual de las fuerzas productivas, volviendo a veces

[2] Este desarrollo de las fuerzas productivas es el logrado en el marco de las formaciones sociales capitalista y socialista. La formación socialista, suprimiendo los obstáculos que para el desarrollo de las fuerzas productivas crean las relaciones de producción capitalistas, hace posible un desarrollo superior de las fuerzas productivas al que puede existir en una formación capitalista.

Sin embargo, considerando las condiciones históricas particulares en que se originaron las primeras relaciones socialistas de producción, y tomando en cuenta que éstas surgieron en países atrasados o económicamente subdesarrollados, debe considerarse que en el primer período del desarrollo de una formación socialista el nivel de desarrollo de las fuerzas productivas es más bajo que en las sociedades capitalistas altamente desarrolladas. De ahí dimana el problema de «alcanzar» a estas últimas. Actualmente dicho período está por concluir.

[3] C. MARX, *Contribución a la crítica de la economía política*, Ed. Alberto Corazón, Madrid, 1970, p. 275.

los ojos hacia el pasado para explicar la génesis de algunas propiedades y regularidades de dicho proceso.

El segundo tipo de leyes que aparecen en el proceso de producción se refiere a las relaciones productivas originadas durante este proceso. Las relaciones de producción constituyen un sistema complejo de relaciones interhumanas y las respectivas partes de dicho sistema se vinculan, en mayor o menor grado, con las propiedades materiales del proceso de producción. Examinaremos aquí tales elementos de las relaciones de producción, señaladas por las propiedades materiales del proceso productivo, que son resultado directo de la interdependencia entre las actividades de diferentes personas. Son éstas las consecuencias que resultan de la cooperación de los hombres en el proceso productivo [4].

II

La actividad humana que constituye la producción se compone de diversos aspectos, que designamos con el nombre de trabajo. Trabajo es un conjunto de funciones realizadas durante el proceso de producción con el propósito de crear bienes; es decir, objetos que sirvan para satisfacer las necesidades humanas. Estas funciones son diversas, y por eso hablamos de distintos tipos de trabajo o, sencillamente, de los diferentes trabajos concretos. Como en el proceso productivo estas funciones se repiten constantemente se suele hablar también de *proceso de trabajo* o, a veces, tomando en cuenta la heterogeneidad de estas funciones, de los procesos concretos de trabajo. El proceso de producción es un conjunto de tales procesos concretos de trabajo, realizados conscientemente y con fines vinculados entre sí para producir un bien determinado, o sea, un producto [5].

Según el carácter de las reservas y las fuerzas de la naturaleza, que están sometidas a una transformación, y al mismo tiempo conforme al tipo de acciones humanas ligadas a esto, es decir, con

[4] Un análisis de los aspectos más amplios de las relaciones de producción, referentes a las respectivas formaciones sociales históricas, será presentado en los capítulos ulteriores del libro.

[5] S. STRUMILIN define la producción de la manera siguiente: «Producción se puede llamar a un sistema de procesos de trabajo imprescindibles para lograr un determinado tipo de productos; por ejemplo: producción de calzado, botas, sandalias, etc.». *Problemy ekonomiki truda* (Problemas de la economía del trabajo), Moscú, 1957, p. 11.

arreglo a los procesos concretos de trabajo, distinguimos diferentes clases de procesos productivos. La producción que consiste en utilizar la tierra para cultivar organismos vivos —animales y vegetales— para satisfacer las necesidades del hombre, se llama producción agrícola o, simplemente, agricultura. La producción que consiste en la transformación de las características físicas, químicas o biológicas de los objetos, se designa con el nombre de producción industrial o industria. El desplazamiento de objetos y personas en el espacio se define como transporte; en cambio, la conservación de los objetos en el tiempo la llamamos almacenamiento. El almacenamiento está frecuentemente vinculado con la distribución y, en ocasiones, prácticamente inseparable de ésta.

Los tipos de procesos de producción mencionados o los sectores de la producción, como se los suele llamar, se pueden, a veces, seguir fraccionando en subdivisiones, que comúnmente se definen como ramas de la producción. De esta manera la agricultura puede dividirse en cultivo de plantas y en cría de los animales; dentro del cultivo de plantas aparece, a menudo, el cultivo forestal como una rama independiente. La industria se divide en industria extractiva, la cual extrae las reservas que se encuentran en la naturaleza (minería, explotación de pozos de todo tipo, caza y pesca); la industria energética, que se encarga de transformar las fuentes de energía que existen en la naturaleza con el fin de ponerla en condiciones útiles para el hombre (por ejemplo, las plantas eléctricas), y en industria transformativa, que prosigue la elaboración de reservas extraídas de la naturaleza. Dentro de la industria de transformación podemos distinguir, a su vez, la producción de maquinaria, la industria electrotécnica, química, textil, farmacéutica, alimenticia y otras, de acuerdo con el carácter de los objetos que se someten a la elaboración y los métodos empleados en este proceso. Algunas veces se considera como una rama aparte la industria de la construcción, es decir, la construcción de edificios que sirven para diversos fines. El transporte se divide, según el tipo de función que desempeña, en transporte terrestre, marítimo y aéreo. A su vez, el almacenamiento puede ser simple, que consiste en la conservación de los objetos en el tiempo, o bien, puede vincularse a una serie de procedimientos adicionales que tienen como propósito conservar el objeto en un estado apto para su consumo (como ejemplo, el caso de la refrigeración).

En la producción, el hombre emplea una técnica material determinada, un conjunto de medios materiales que sirven para reali-

zar el objetivo de la producción, o, en otras palabras, para obtener un producto determinado [6]. Esta técnica la denominamos *técnica de producción*. La técnica de producción consiste en el aprovechamiento hábil de los nexos causales que se manifiestan en la naturaleza y en el organismo humano; es decir, las leyes físicas, químicas y biológicas, así como también las leyes fisiológicas y psicológicas del organismo humano (por ejemplo: la relación que existe entre la destreza en el trabajo y la fatiga). Los medios materiales empleados en la técnica de producción se llaman *medios de producción*. La aplicación de estos medios consiste en la realización de las causas, cuyo efecto es la obtención del producto deseado. Esto se lleva a cabo durante el proceso de trabajo. El trabajo humano aplica medios de producción, «los pone en movimiento», y el producto es, precisamente, una consecuencia de tales funciones.

El proceso de trabajo, en el que se emplean los medios de producción, consiste en la transformación de las reservas materiales existentes en la naturaleza y en el aprovechamiento de las fuerzas naturales para efectuar esta transformación. En producción —dice Marx— el hombre sólo puede proceder como procede la misma naturaleza, es decir, *haciendo que* la materia cambie de forma. Se apoya constantemente en las fuerzas naturales [7]. En relación a esto diferenciamos dos tipos de medios de producción. Al primer tipo pertenecen los objetos materiales, que sufren una transformación durante el proceso productivo. Esta transformación se lleva a cabo gracias al trabajo. Al segundo tipo pertenecen los medios materiales, que sirven para transformar los objetos de trabajo. Estos se denominan *medios de trabajo* [8].

Los objetos de trabajo constituyen el material del que se va formando el producto. Frecuentemente se los suele designar con el nombre de «tvorzyvo», una especie de material bruto que se utiliza especialmente en la tecnología, es decir, en la ciencia dedicada a todo tipo de técnicas de producción [9]. Los objetos de trabajo son especialmente las reservas de la naturaleza, tales como la tierra,

[6] Véase O. LANGE, *Economía Política*, ed. cit., t. I, pp. 134-136.

[7] Véase la edición de *El Capital*, de C. MARX, traducción de Wenceslao Roces, Fondo de Cultura Económica, México, 1973, t. I, p. 10.

[8] *Idem, ibidem*, p. 131.

[9] Tadeusz KOTARBINSKI define «tvorzyvo», «material bruto», de la siguiente manera: «éste es un cierto objeto..., del cual surgió la cosa que es el producto creado...». Posteriormente afirma: «todo producto creado es una transformación del material bruto propio, es decir, la transformación de la materia creada que ha sido la fase anterior de la cosa que cambia...». *Traktat o dobrej robocie* (Tratado del buen trabajo), Lodz, 1958, p. 48.

el agua, el aire, los yacimientos de carbón, yacimientos petrolíferos y minerales, los peces marinos, los animales salvajes, etc. Objetos de trabajo son también ciertos productos o materiales ya conformados por el trabajo anterior. Estos objetos de trabajo llevan el nombre de *materia prima* [10]. La materia prima también puede ser un producto que sirve para otro uso, aparte de ser objeto de trabajo. Por ejemplo: el carbón (la hulla) puede ser utilizado tanto para la calefacción dentro de la economía doméstica como en la producción del coque o en la industria química; las uvas pueden comerse o pueden utilizarse como materia prima en la elaboración de vino. Los productos que sólo pueden utilizarse como materia prima, es decir, exclusivamente como objetos de trabajo, los llamamos productos *semielaborados* (o *semifabricados)* [11]. Como ejemplo de los productos semielaborados podemos mencionar: el algodón, coque, hierro, el caucho crudo, abonos minerales, partes de maquinaria sin montar o máquinas a las cuales les falta el acabado. De los artículos a medio fabricar distinguimos los artículos acabados. Los artículos acabados, no siendo materia prima, pueden, no obstante, ser medios de producción de otro tipo (por ejemplo, las máquinas) o pueden constituir los bienes de consumo (por ejemplo, el pan o la ropa). Continuamos dividiendo las materias primas en *materias básicas* y *materias auxiliares* [12]. Las primeras, después de su transformación en el proceso de trabajo, llegan a

[10] «Por el contrario, cuando el objeto sobre que versa el trabajo ha sido ya, digámoslo así, filtrado *por un trabajo anterior,* lo llamamos *materia prima.* Es el caso, por ejemplo, del cobre ya arrancado al filón para ser lavado. Toda materia prima es objeto de trabajo, pero no todo objeto de trabajo es materia prima. Para ello es necesario que haya experimentado, por medio del trabajo, una cierta transformación.» C. MARX, *El Capital,* ed. cit., t. I, p. 131.

[11] «Puede ocurrir que un producto apto para ser directamente consumido, se emplee de nuevo como materia prima para la elaboración de otro producto, como se hace por ejemplo con la uva para la fabricación de vino. Otras veces el trabajo arroja su producto bajo una forma en que *sólo* puede emplearse como materia prima. A estas materias primas se les da el nombre de *artículos a medio fabricar,* aunque más exacto sería denominarlas *artículos intermedios,* como son por ejemplo el algodón, el hilado, la hebra, etc.» *Idem,* pp. 134-135.

[12] C. MARX, *El Capital,* ed. cit., t. I, p. 134: «Las materias primas pueden formar la sustancia principal de un producto o servir *simplemente* de *materias auxiliares* para su fabricación. Las materias auxiliares son *absorbidas por el mismo instrumento de trabajo,* el carbón por la máquina de vapor, el aceite por la rueda, el heno por el caballo de tiro, o *incorporadas a la materia prima,* para operar en ella una transformación de carácter material, como ocurre con el cloro que se emplea para blanquear las telas, con el carbón que se mezcla al hierro, con el color que se da a la lana, etc.; otras veces, sirven para ayudar simplemente a la *ejecución del trabajo,* que es lo que acontece, *v. gr.* con los materiales empleados para iluminar y calentar los locales en que se trabaja.»

formar parte del producto como su principal contenido material o su fuente principal de la que deriva el contenido material de éste (mineral de hierro y la chatarra, en la producción de acero; los cueros suaves y duros, en la producción de calzado; algodón, lana y lino, en la elaboración de los productos textiles; el petróleo crudo, en la producción de gasolina; el carbón, en la producción del coque y del gas de alumbrado). Otros materiales constituyen los accesorios para el material fundamental y sirven para conferir al producto ciertas propiedades determinadas (por ejemplo: tinturas, en la fabricación de productos textiles; barniz, en la producción de muebles). A veces los materiales auxiliares son un complemento, no del propio objeto de trabajo, sino de los medios de trabajo empleados en la producción de éstos (por ejemplo, los aceites y los lubricantes para la maquinaria, el diesel o la corriente eléctrica necesarios para el motor que pone en movimiento la maquinaria, el combustible que sirve para calentar el recinto fabril).

Sin embargo, en muchos casos la división de materias primas en materias básicas y auxiliares resulta imposible de lograr. Este es el caso que sucede frecuentemente en la industria química o farmacéutica [13].

En éstas, muchas veces, no se puede afirmar cuáles de entre los elementos que componen una receta tienen carácter fundamental y cuáles son tan sólo auxiliares. Todos los ingredientes sufren una transformación total durante el proceso de síntesis química, y el elemento que decide sobre el efecto curativo del producto no es ni mucho menos aquél que predomina cuantitativamente (frecuentemente en el medicamento el agua es el ingrediente que prevalece cuantitativamente). De manera que no siempre se pueden dividir las materias primas en materiales básicos y materiales auxiliares.

Los medios de trabajo sirven para transformar el objeto de trabajo, para elaborarlo y para darle la forma del producto deseado. Los medios de trabajo cumplen su misión directamente cuando, al ser utilizados por el hombre, de una manera directa, transforman el objeto de trabajo, o bien de manera indirecta, cuando hacen posible o facilitan la aplicación de los medios de trabajo con cuya ayuda se efectúa la transformación directa del objeto del trabajo.

Los medios de trabajo que sirven directamente para la trans-

[13] Ya Marx lo tomó en cuenta: *El Capital*, ed. cit., t. I, p. 134: «En la verdadera industria química, se borra esta distinción entre materias principales y auxiliares, ya que en la sustancia del producto no *reaparece* ninguna de las materias primas empleadas.»

formación del objeto de trabajo los llamamos *instrumentos de trabajo* [14]. Exceptuando el estado muy primitivo de las fuerzas productivas en los albores del género humano, cuando éste apenas emergía de su estado animal y los instrumentos de trabajo encontrados en la naturaleza eran objetos no elaborados aún, como piedras o palos, los instrumentos de trabajo constituyen siempre una creación del trabajo humano, son productos de éste [15]. Por lo regular, los instrumentos de trabajo son objetos especialmente adaptados para cumplir una función determinada; por ejemplo: hachas, arcos, cuchillos, serruchos; todo tipo de máquinas, implementos mecánicos, ópticos y químicos (como calderas, microscopios, cisternas, cañerías, etcétera). Los medios de transporte (caballos, carruajes, locomotoras, barcos, aviones), así como también medios que sirven para el almacenamiento de los bienes (por ejemplo: bodegas, cámaras frigoríficas). Los medios de trabajo, especializados en mayor y menor grado, se denominan *aparatos* o *instrumentos de precisión.* A medida del desarrollo de las fuerzas productivas aumenta el número y variedad de los instrumentos de trabajo especializados; es decir, sobreviene la instrumentalización del proceso de trabajo. El desarrollo de los instrumentos de trabajo (su incremento numérico, su diversidad y su eficacia) constituyen los factores más dinámicos para el desarrollo de las fuerzas productivas. Con la ayuda de los instrumentos de trabajo el hombre transforma el medio que le rodea, forma el ambiente en el que vive. En la aplicación de los instrumentos de trabajo se manifiesta la correlación activa del hombre con la naturaleza; los instrumentos de trabajo son mucho más importantes que la práctica humana, la cual hace transformar la realidad.

Junto a los instrumentos de trabajo existen medios de trabajo necesarios para la aplicación de los instrumentos de trabajo. Estos se utilizan indirectamente para transformar el objeto de trabajo, porque hacen posible o facilitan el empleo de los instrumentos. A tales medios de trabajo pertenecen: la tierra (terreno) donde se

[14] En la cuestión del concepto de instrumento vea T. KOTARBINSKI, *Traktat o dobrej robocie* (Tratado del buen trabajo), ed. cit., p. 52, y posteriormente Fr. VON GOTTL-OTTILIENFELD, que define el instrumento de trabajo de la manera siguiente: «El instrumento es un intermediario corporal de una acción determinada que ejerce la mano o la máquina sobre un tercer objeto» *(Wirtschaft und Technik, Grundriss Sozialökonomik,* parte II, Tibingen, 1932, p. 94). Vale la pena consultar ese libro, que constituye una elaboración sistemática, única hasta la fecha, de los principios praxeológicos que destacan en la técnica contemporánea de producción.

[15] Recordaremos aquí la frase de Benjamín Franklin, de que el hombre es un animal que hace sus propios instrumentos (a «tool-making» animal).

efectúan las acciones durante las cuales se utilizan los instrumentos de trabajo; toda clase de recintos o áreas construidas, como son los edificios, bardas, carreteras, puentes y canales, que son auxiliares en el empleo de los instrumentos de trabajo y, por esta razón, los denominamos *instalaciones auxiliares* [16].

Como se desprende de las reflexiones arriba presentadas, la diferencia que existe entre los productos y los medios de producción, entre objetos de trabajo y los medios de trabajo, no es una diferencia material. Esta consiste en la función o el papel que un objeto dado desempeña en el proceso de trabajo. La mayor parte de los medios de trabajo constituyen productos, puesto que éstos ya han sido fabricados, o cuando menos elaborados o extraídos mediante el trabajo humano. Empero, no todos los productos constituyen medios de trabajo; una parte considerable de éstos son bienes de consumo.

Un mismo objeto algunas veces puede ser objeto de trabajo y en otras ocasiones puede constituir un medio de trabajo. Por ejemplo: el agua extraída para la elaboración de las bebidas es un objeto de trabajo; en cambio, el agua que hace girar la rueda de un molino o, en forma de vapor, pone en movimiento la locomotora, tiene carácter de un medio de trabajo.

«Como se ve, el que *un valor de uso* (o sea, un objeto material dado, O.L.) represente el papel de *materia prima, medio de trabajo o producto,* depende única y exclusivamente de las *funciones concretas* que ese valor de uso desempeña *en el proceso de trabajo,* del lugar que en él ocupa; al cambiar este lugar cambian su destino y su función» [17].

Ahora nos ocuparemos del modo por el que los medios de trabajo cumplen su función en el proceso de trabajo. Marx caracteriza este modo de manera siguiente: «El *medio de trabajo* es aquel objeto o conjunto de objetos que el obrero interpone entre él y el

[16] Esta denominación es usada por KOTARBINSKI en su *Traktat o dobrej robocie* (Tratado del buen trabajo, ed. cit., p. 57). KOTARBINSKI usa también la palabra «utensilio» para designar cualquier medio de trabajo, tanto los instrumentos de trabajo como las instalaciones auxiliares. Además, KOTARBINSKI afirma que los animales no producen instrumentos (aunque a veces utilizan ciertos objetos como herramientas); producen, sin embargo, instalaciones auxiliares, las cuales facilitan la realización de ciertas acciones. Por ejemplo, la araña no caza a la mosca con su telaraña, sino la vigila y la caza cuando ésta cae dentro de su tela. Casi siempre estas instalaciones tienen el carácter de recintos (por ejemplo: los nidos, las madrigueras, los diques de los castores). Sólo el hombre es el que produce instrumentos. *Idem,* pp. 56-59.

[17] C. MARX, *El Capital,* ed. cit., t. I, p. 135.

objeto que trabaja y que le sirve para *encauzar* su actividad sobre este objeto. El hombre se sirve de las cualidades mecánicas, físicas y químicas de las cosas para utilizarlas, conforme *al fin perseguido,* como instrumentos de actuación sobre otras cosas. El objeto que el obrero empuña *directamente* —si prescindimos de los víveres aptos para ser consumidos sin más manipulación, de la fruta, por ejemplo, en cuyo caso los instrumentos de trabajo son sus propios órganos corporales— no es el objeto sobre el que trabaja, sino el instrumento de trabajo. De este modo, los productos de la naturaleza se convierten directamente en *órganos* de la actividad del obrero, órganos que él incorpora a sus propios órganos corporales, prolongando así, a pesar de la Biblia, su estatura natural» [18].

III

La aplicación de los medios de trabajo, y sobre todo de los instrumentos de trabajo, consiste en el aprovechamiento hábil de las fuerzas de la naturaleza y en unir estas fuerzas al proceso de trabajo efectuado por el hombre a manera de colaboradores del mismo [19]. Esto sucede ante todo mediante la prolongación, fortalecimiento, aceleración y refinamiento de las funciones de los órganos del cuerpo humano. Un palo o una piedra lanzada prolonga el alcance de la mano humana, la palanca o la manivela aumenta la fuerza del brazo humano, la bicicleta acelera el resultado de la ac-

[18] *Idem,* pp. 131-132.

[19] Las fuerzas de la naturaleza están aprovechadas en todos los campos de la producción. En el siglo XVIII surgió la escuela de los fisiócratas, que erróneamente suponía que la participación de las fuerzas de la naturaleza en el proceso productivo tiene lugar sólo en la agricultura. Este punto de vista fue expresado también por Adam SMITH en 1776, el cual escribía: «En la agricultura, la naturaleza trabaja también a la par del hombre.» Añadiendo, además: «En estas actividades (industria), la naturaleza no hace nada, todo lo hace el hombre» *(La riqueza de las naciones),* Aguilar, Madrid, 1961, p. 317. David Ricardo le respondió de la siguiente manera: «¿No hace la naturaleza nada para el hombre en las manufacturas? ¿Es que no son nada los poderes del viento y del agua, que impulsan nuestra maquinaria y ayudan a la navegación? La presión atmosférica y la elasticidad del vapor, que permiten el funcionamiento de los motores más estupendos, ¿no son todos ellos dones de la naturaleza?, para no mencionar los efectos del calor para reblandecer y fundir los metales (...). No puede citarse ningún proceso de fabricación en el que la naturaleza no brinde su ayuda (...)» *(Principios de economía política y tributación).* Fondo de Cultura Económica, México, 1973, p. 58. La observación de Ricardo es aún más acertada hoy, cuando al servicio del proceso productivo se han sometido tales fuerzas de la naturaleza, como son la electricidad y la energía liberada por la desintegración del átomo, sin hablar ya de un sinfín de diversas reacciones químicas.

ción de las piernas, el microscopio agudiza la facultad de observación del ojo, etcétera. Este tipo de instrumentos de trabajo son, por lo regular, modelados a imagen de los órganos del cuerpo humano y su acción está basada en los mismos principios que la acción de tales órganos. «Es cosa digna de considerarse —dice Kotarbinski— que los instrumentos primitivos y elementales constituyen una especie de modelamiento y a la vez una cierta prolongación y agigantamiento [de los órganos, O.L.]: el mazo corresponde a una mano armada con su puño, el cuchillo a un filoso diente incisivo, una azada tiene la forma de un brazo completo con mano y dedos, los zancos corresponden a las piernas, las pinzas a las mandíbulas, etcétera. El hombre logró dar un paso crucial al elaborar los instrumentos, creaciones exteriores, aparentemente hechos a imagen y semejanza de los órganos propios u observados en otros seres» [20].

Existen, sin embargo, instrumentos especializados para cumplir funciones determinadas, instrumentos que en vez de prolongar, fortalecer, etcétera, las funciones de los órganos humanos, reemplazan estos órganos. Un caballo o un automóvil, por ejemplo, sustituyen el uso de los pies humanos. Otros instrumentos de trabajo efectúan las funciones que ningún órgano humano es capaz de llevar a cabo aun de la manera más rudimentaria. Se puede decir que tales instrumentos proveen al hombre de una especie de órganos nuevos que éste no posee. Como ejemplo se pueden mencionar: la rueca, el telar, el generador de corriente eléctrica o el ciclotrón. La construcción y el modo de funcionamiento de tales instrumentos en nada recuerda a los órganos humanos por la razón de que éstos están basados en otros principios, que surgen de lo específico de las leyes de la naturaleza, que son aprovechadas. Un lugar aparte ocupan los instrumentos que aportan energía, como las calderas de vapor, todo tipo de motores, etcétera. Estos instrumentos, durante el proceso de trabajo, sustituyen o complementan la fuerza del organismo humano.

Una importancia social en el desarrollo del papel que desempeñan los medios de trabajo en su proceso, la tiene la introducción de las máquinas. La *máquina* es un conjunto de instrumentos de trabajo especializados; es decir, instrumentos puestos en marcha simultáneamente o sucesivamente por uno de éstos, un instru-

[20] T. KOTARBINSKI: *Traktat o dobrej robocie* (Tratado del buen trabajo). Ed. cit., p. 56.

mento que pone en movimiento a la máquina (por ejemplo: el arranque en el automóvil). Como regla, por lo general, la máquina tiene también en su conjunto uno o varios instrumentos que dirigen las funciones de ésta (instrumentos de dirección, llamados así especialmente en tecnología) y los que regulan su funcionamiento (por ejemplo: el manubrio y el acelerador en el automóvil) [21]. La máquina puede ser puesta y mantenida en movimiento por la fuerza de los músculos humanos (por ejemplo: una máquina de mano o de pedal), así como también por medio de otras fuentes de energía diferentes a la fuerza del organismo humano. En el último caso, que hoy constituye una regla, existe una máquina especial o una parte de máquina que llamamos motor (por ejemplo: el motor eléctrico o de combustión; la máquina de vapor también es un motor).

El motor es una máquina, o parte de una máquina puesta en movimiento por una fuente de energía tomada de la naturaleza. En un principio, los motores eran puestos en marcha por la fuerza de tracción de los animales que reemplazaba a la fuerza de los músculos humanos (por ejemplo: la noria movida por los caballos o los bueyes y que se conectaba a una trilladora o bomba). Posteriormente se han ido utilizando fuentes de energía inorgánica, encontradas directamente en la naturaleza, como son el agua y el viento (por ejemplo: para mover los molinos); finalmente, también se utilizan formas de energía liberadas intencionalmente por el hombre, como la compresibilidad del vapor de agua o de gases inflama-

[21] La dirección o el manejo de las funciones de una máquina significa que se hace que la máquina actúe sobre el objeto de trabajo de una manera determinada, elegida por el hombre, en un lugar determinado y con una intensidad determinada. Por ejemplo, en el caso de una fresadora —para lograr que la máquina corte o esmerile— su manejo consiste en aplicar el cuchillo o el esmeril, en un lugar adecuado, al trozo de metal que constituye el objeto de trabajo, y establecer la frecuencia de las revoluciones y la presión que ejercerán el cuchillo o el esmeril. Regular el trabajo de ésta significa mantener un método, lugar e intensidad determinados del funcionamiento de la máquina respecto a las influencias perturbadoras colaterales, que provienen ya sea del exterior de la máquina (por ejemplo del medio ambiente), o bien de la acción de la propia máquina (por ejemplo, las vibraciones). Regular consiste en impedir desviaciones en el funcionamiento de la máquina, y en establecer el modo, lugar e intensidad mediante el manejo de éstas: por ejemplo, mantener una velocidad determinada de revoluciones y de la presión que ejerce la fresadora, mantener una temperatura y una presión constantes en una caldera de vapor, mantener la dirección elegida del vuelo del avión.

Consultar B. I. DOMANSKI: *Podstawy automatyki i telemechaniki* (Las bases de la automatización y telemecánica) (traducción del ruso), Varsovia, 1954, p. 208.

Automatisierung. Stand und Auswirkungen in der Bundesrepublik Deutschland, Munich, 1957, pp. 27-28, así como también W. HORNAUER: *Automatyka przemysłowa* (La automática industrial) (traducción del alemán), Varsovia, 1957, p. 18.

bles, la corriente eléctrica y la energía de las reacciones nucleares. La acción del motor es transmitida a la máquina mediante una transmisión mecánica, eléctrica, por radiación u otras. La transmisión puede ser llevada a cabo por una máquina especial o por partes de la máquina puestas en movimiento. Tomando en cuenta las propiedades descritas de la máquina, Marx diferencia el mecanismo de movimiento (los motores), el mecanismo de transmisión y la máquina-herramienta o máquina de trabajo [22]; como hemos podido ver, éstas pueden ser también partes de una sola máquina combinada. Las máquinas de trabajo actúan directamente sobre el objeto de trabajo, lo transforman de acuerdo con las intenciones del hombre que dirige la máquina.

Marx caracteriza de la siguiente manera el modo de acción de la máquina durante el proceso de trabajo: «La máquina de que arranca la revolución industrial sustituye al obrero que maneja una sola herramienta por un mecanismo que opera con una *masa* de herramientas iguales o parecidas a la vez y movida por una sola fuerza motriz, cualquiera que sea la forma de ésta» [23]. A esta caracterización hay que agregarle que los instrumentos cuyo conjunto constituye una máquina no sólo actúan simultáneamente, sino también consecutivamente, y a la vez las acciones subsecuentes de los instrumentos individuales «se engranan» de manera que la acción de un instrumento pone en movimiento otro instrumento; éste, a su vez, pone en marcha el tercero, etc.

Este engranaje consecutivo de las acciones efectuadas por los instrumentos individuales se denomina *mecanismo.* El mecanismo consiste en unir las acciones de los respectivos instrumentos de un determinado conjunto, a manera de una cadena de causas y efectos sucesivos, y la acción de los instrumentos correspondientes forma los eslabones de esta cadena. La acción de un instrumento es causa que provoca la acción de otro instrumento (o instrumentos, etc.). Esa unión puede ser también tal que para provocar la acción de un instrumento que constituya un eslabón del mecanismo es necesaria la acción de algunos instrumentos más. Tales cadenas causales son las que unen la acción de los respectivos instrumentos en un mecanismo que se llama *acoplamiento* [24]. Decimos que en un mecanismo,

[22] Ver C. MARX: *El Capital,* ed. cit., vol. 1, p. 303.

[23] Idem, p. 306.

[24] La denominación «acoplamiento» fue introducida en la terminología polaca por Henryk GRENIEWSKI: *Elementy cybernetyki sposobem niematematycznym wylozone* (Elementos de cibernética expuestos con métodos matemáticos), Varsovia, 1953, p. 32.

las acciones de los instrumentos individuales están acopladas de una manera determinada. Así como los instrumentos simples están en un principio formados sobre los modelos de los órganos humanos, de una manera similar las máquinas de trabajo están modeladas, en principio, a la imagen de los instrumentos de trabajo simples que el hombre ponía en movimiento directamente [25]. En el curso de un desarrollo ulterior, las máquinas de trabajo paulatinamente dejan de ser modeladas a imagen de los instrumentos utilizados directamente por el hombre, y son reemplazados (por ejemplo, un bisturí quirúrgico eléctrico, cuya acción consiste en quemar un tejido, o un soplete de acetileno que corta y suelda el metal derritiéndolo) o realizan funciones nuevas que nunca antes habían sido efectuadas por ninguno de los instrumentos antiguos (por ejemplo, el aparato de rayos X para hacer radiografías, un avión, o un reactor atómico). Desde un principio, los motores han sido construidos de acuerdo a lo específico de las fuerzas de la naturaleza que están siendo aprovechadas (por ejemplo, la máquina de vapor, el motor eléctrico), y no según los modelos de los instrumentos de trabajo más antiguos. La máquina sustituye la actuación directa del hombre sobre el objeto de trabajo con la ayuda de un instrumento que interpone entre el hombre y el objeto de trabajo la acción del mecanismo. Esto modifica el carácter del trabajo humano. La elaboración directa del objeto de trabajo efectuada por la fuerza del organismo humano, el cual emplea los instrumentos, es reemplazada por el *servicio de la máquina* que consiste en ponerla en movimiento, en dirigir y regular sus funciones, así como también en vigilar el funcionamiento de su mecanismo. En lugar del trabajo efectuado en el objeto de trabajo surge el trabajo al servicio de la máquina para la máquina, mientras que la transformación del objeto de trabajo es resultado de la acción del mecanismo de la misma. La acción del hombre sobre el

[25] C. MARX: *El Capital*, ed. cit., vol. 1, p. 304: «Si observamos un poco de cerca la *máquina-herramienta*, o sea, la verdadera *máquina de trabajo*, vemos reaparecer en ella, en rasgos generales, aunque a veces adopten una forma muy modificada, los aparatos y herramientas con que trabajan el obrero manual y el obrero de la manufactura, con la diferencia de que, en vez de ser herramientas en manos de un hombre, ahora son herramientas mecánicas, engranadas en un mecanismo. Unas veces, la máquina no es, en conjunto, más que una nueva edición mecánica más o menos corregida del viejo instrumento manual, como ocurre con el telar mecánico; otras veces, los órganos que funcionan acoplados al esqueleto de la máquina de trabajo son antiguas herramientas adaptadas a ella, como los husos en la máquina de hilar, las puntas en el telar de hacer medias, las cintas de sierra en la máquina de aserrar, los cuchillos en la máquina de picar, etc.»

objeto de trabajo es indirecta, el hombre pone en movimiento una cadena de causas y efectos, y éstas como efecto final transforman el objeto de trabajo de la manera deseada. Para caracterizar este método indirecto de acción, Marx cita una conocida frase de Hegel sobre la astucia de la razón [26]. La «astucia» de la inteligencia humana, que encuentra su expresión en la acción de la máquina, consiste en el aprovechamiento de la ley de la causalidad que actúa en la naturaleza, en la unificación de diversas fuerzas y objetos en una cadena de causas y efectos tal, que la transformación deseada del objeto de trabajo constituya el efecto final de dicha cadena.

IV

La acción indirecta que se produce mediante esta cadena de causas y efectos sustituye la intervención directa del hombre ejercida sobre el objeto de trabajo, según la expresión de Kotarbiński sobreviene una *minimalización de la intervención,* a la que caracteriza de la siguiente manera: «Tratamos de lograr que todo lo que para nosotros sea necesario ocurra, hasta donde sea posible, de manera espontánea, aunque partiera desde cierto punto del proceso determinado. Por ejemplo, en lugar de arrastrar troncos de los árboles cortados cuesta abajo, los leñadores empujan los troncos a un arroyo cuya corriente los arrastra llevándolos, en cierta forma, hasta su punto de destino» [27]. El ejemplo descrito indica que el empleo de maquinaria no es un método único de acción indirecta dentro del proceso de trabajo que reemplaza la intervención directa, al poner en movimiento la respectiva cadena de causas y efectos en los procesos de la naturaleza. Este tipo de acción directa, aun sin aplicación de maquinaria, se manifiesta ante todo en la producción química y agrícola, y lo que es más, ésta constituye una de las características fundamentales de estos tipos de producción.

En la producción química, por ejemplo, se mezclan los elementos correspondientes, se somete la mezcla a la presión y tempera-

[26] *(List der Vernunft):* «La razón es tan astuta como poderosa. La astucia consiste en esa actividad mediadora que, haciendo que los objetos actúen los unos sobre los otros y se desgasten mutuamente como cumple a su carácter, sin mezclarse directamente en ese proceso, no hace más que conseguir su propio *fin.*»

[27] KOTARBINSKI: *Traktat o dobrej robocie* (Tratado del buen trabajo). Ed. cit., p. 151. Ver también p. 150, así como también T. KOTARBINSKI, *Sprawnoíc i blad* (Eficiencia y error), Varsovia, 1960, pp. 56-57.

tura adecuadas, y «la naturaleza misma» efectúa la síntesis mediante una reacción química automática. Aquí es donde actúa la cadena de causas y efectos, que una vez puesta en acción por el hombre, como resultado final, da el producto deseado; la intervención directa es aquí sustituida por el propio proceso químico, al haberle dado el impulso inicial, haberlo dirigido, regulado y vigilado durante su curso. La aplicación de la acción indirecta durante los procesos químicos es más antigua que el uso del mecanismo de una máquina, por ejemplo, en la preparación de pinturas, al blanquear las telas, o en la elaboración del vino (fermentación). En la agricultura, este método es más antiguo aún: el cultivo de plantas y la cría de animales se basa precisamente en la acción indirecta. Aquí, desde el principio, la acción del hombre consiste en movilizar una cadena de causas y efectos, cuyo resultado final es el producto deseado. Las plantas se siembran o se plantan, después éstas siguen creciendo solas, maduran y dan el producto en forma de fruto o grano. El trabajo humano se reduce, por lo tanto, a un servicio efectuado en aras del proceso biológico de crecimiento y maduración (por ejemplo, mediante la siembra y plantación, una irrigación adecuada, el desyerbado, poda de los retoños superfluos, el injerto de las plantas o su cruce, etc.). La cría de animales es un caso semejante.

Es evidente que el funcionamiento de una máquina representa en los instrumentos de trabajo la aplicación de la acción indirecta, la cual sustituye la intervención merced al servicio de la cadena de causas y efectos —de la misma manera como ocurre en la producción agrícola y química—. En el mecanismo de la máquina, el método ancestral de actuar sobre los procesos biológicos y químicos es aplicado a los procesos mecánicos y electromecánicos [28]. El mecanismo entonces constituye un caso particular del conjunto de cadenas de acciones causales y de efectos, o sea, como decimos, *del sistema de acciones acopladas* [29].

[28] Lo toma en cuenta Lewis MUMFORD, cuando caracteriza a un obrero que maneja las máquinas: «... éste es, yo diría, como un pastor de las máquinas que vigila el bienestar del rebaño. Siendo las máquinas las que ejecutan el trabajo real, el pastor no hace más que alimentarlas con aceite y componerlas cuando éstas se descomponen, mientras que el trabajo que éstas efectúan es tan distante de la acción llevada a cabo por el obrero, como lo es la digestión que engorda a las ovejas cuidadas por el pastor» (L. MUMFORD: *Technics and Civilization*, Nueva York, 1943, pp. 410-411. Existe traducción castellana en Alianza Editorial, Madrid).

[29] De la investigación de los sistemas generales de las propiedades y de las normalidades en los conjuntos de acciones acopladas se ocupa una ciencia independiente: la cibernética. Ross ASHBY ofrece una buena introducción a ésta: *Wstep do cybernetyki* (Introducción a la cibernética), Varsovia, 1963.

El manejo del sistema de acciones acopladas que se aplica durante el proceso de trabajo consiste, como hemos visto, en iniciar la acción de éste, en su dirección («timoneo»), regulación y vigilancia. El perfeccionamiento ulterior del proceso consiste en la reducción del servicio necesario para iniciar y vigilar las funciones del sistema de acciones acopladas. La introducción de este tipo de mecanismos que reemplazan la intervención directa del hombre en la dirección y regulación de las funciones de los sistemas de acciones acopladas que se aplican en el proceso de trabajo se llama *automatización*. La automatización siempre consiste en la introducción de un mecanismo especial, que vigila y regula las funciones del sistema acoplado. Este mecanismo, en forma de una máquina especial, o más frecuentemente en forma de un instrumento inserto en el conjunto de instrumentos que constituyen una máquina (este tipo de instrumento lo denominamos comúnmente dispositivo), se llama *servomecanismo* [30], o sea, mecanismo de servicio. El servomecanismo es un mecanismo en el sentido literal, porque consiste en la acción de fuerzas mecánicas (incluyendo en éstas también la acción hidromecánica y termodinámica) y electromecánicas. Generalmente el movimiento de un servomecanismo es limitado por una fuente suplementaria de energía, llamada fuente auxiliar, que frecuentemente es energía eléctrica [31].

La acción del servomecanismo consiste en el acoplamiento retroactivo, es decir, en una cadena cerrada de causas y efectos [32]. En un acoplamiento retroactivo el eslabón final de la cadena vuelve a actuar de nuevo sobre el eslabón o (eslabones) anteriores. Al automatizar la dirección y regulación, el acoplamiento retroactivo tiene que actuar de una manera determinada: en una máquina cualquier desviación del efecto final (o del proceso químico o biológico) que obstaculice a éste a alcanzar un efecto deseado, o sea, la norma, causa tal cambio en las funciones anteriores, que en el efecto final se produce una corrección de la desviación. El acopla-

[30] Frecuentemente se usa el término *mecanismo de control*. El creador de la cibernética, Norbert Wiener, utiliza los términos servomecanismos y mecanismo de control como equivalentes. Ver N. WIENER: *Cybernetics or Control and Comunication in the Animal and the Machine*, París, 1948, p. 55. [En la edición castellana *(Cibernética*. Guadiana, Madrid, 1960) aparecen los términos «aparato de control» y «regenerador» (p. 34).]

[31] Véase *Automatisierung...*, ed. cit., p. 30.

[32] En inglés, al acoplamiento retroactivo se le llama *feed-back*, es decir, suministro de retroceso. Este término inglés ganó últimamente la aceptación, «el derecho de ciudadanía», en muchos otros idiomas. Ver N. WIENER: *Cybernetics...*, ed. cit., capítulo IV.

miento retroactivo que actúa de esta manera lo denominamos acoplamiento retroactivo de *compensación* [33]. Corrige, en cierto sentido, «los errores» que pudieran presentarse en el funcionamiento de la máquina o cualquier sistema acoplado, empleado en el proceso de trabajo.

Uno de los servomecanismos más antiguos es el regulador centrífugo de la máquina de vapor inventado por James Watt y patentado en 1769. Este regulador está conectado con la caldera de la máquina de vapor, así como también con el tubo que introduce el vapor dentro del cilindro. Cuando la velocidad de las revoluciones de la rueda sobrepasa la norma establecida, el regulador disminuye el flujo de vapor hacia el cilindro, lo cual hace disminuir la velocidad de las revoluciones. Y cuando la velocidad de las revoluciones de la rueda es menor que lo que estipula la norma, el regulador aumenta el flujo de vapor aumentando consecuentemente la velocidad de las revoluciones. De esta manera la máquina de vapor conserva por sí misma una velocidad de revoluciones determinada. La acción de este regulador es totalmente mecánica. Hoy los servomecanismos actúan principalmente de manera electromecánica. Un servomecanismo de este tipo es, por ejemplo, el piloto automático que mantiene una determinada dirección del vuelo, o una brújula giroscópica que mantiene un movimiento establecido de un barco.

Los servomecanismos son utilizados tanto para la automatización del manejo (dirección) como para la regulación de una máquina u otro sistema acoplado que se utiliza en el proceso del trabajo. La automatización del manejo se reduce, sin embargo, a la automatización de la regulación [34]. Esta se compone de dos partes. La primera consiste en fijar las tareas que la máquina debe cumplir, determinar de qué modo, en qué lugar y con qué intensidad la

[33] El acoplamiento retroactivo de compensación actúa en tal forma que cuando el efecto final sobrepasa la norma establecida disminuye la intensidad de la causa que había provocado este fenómeno; la intensidad, en cambio, aumenta cuando el efecto final desciende por debajo de la norma. El acoplamiento retroactivo llamado de acumulación actúa de manera inversa; éste aumenta la intensidad de la causa que produce el efecto final cuando este efecto sobrepasa la norma, y disminuye la intensidad de la causa en caso de no alcanzar la norma. Es evidente que este tipo de acoplamiento no regula sus funciones automáticamente —todo lo contrario—, todas las desviaciones de la norma aumentan de manera acumulativa. Esto sucedería, por ejemplo, si el regulador de una máquina aumentara el suministro de vapor cuando la velocidad de revoluciones excediera la norma.

[34] Ver Ross ASHBY: *Wstep do cybernetyki* (Introducción a la cibernética). Ed. cit., pp. 298 y ss.

máquina ha de elaborar el objeto de trabajo. La determinación de estas tareas se denomina *programación* de las funciones de la máquina; la programación establece las normas de funcionamiento de ésta.

La segunda parte es la regulación de las funciones de la máquina mediante un servomecanismo, de tal manera que sobreviene la corrección de todo tipo de desviaciones de las normas establecidas o, como se suele decir, del programa impuesto a la máquina. Como un ejemplo se puede citar la dirección automática del avión o barco, como ya se ha mencionado. El programa o la norma lo constituye aquí la dirección del movimiento establecida por el piloto o capitán, y el servomecanismo corrige cualquier desviación de la dirección establecida. En muchas máquinas la programación se refiere a un número mayor de las funciones de la máquina; ésta consiste entonces en establecer las normas de la sucesión e intensidad de diversas funciones y el servomecanismo incorpora a la acción las funciones particulares, de acuerdo con una sucesión determinada, y regula su intensidad (por ejemplo, una fresadora múltiple dirigida mediante un programa).

Existen finalmente máquinas en las cuales, como se sabe, la propia programación es automatizada. El programa, o sea, el conjunto de normas para las funciones efectuadas por la máquina, toma en este caso forma de tareas variables que se van adaptando a los cambios que se producen en el objeto de trabajo, es decir, a manera de una relación entre las tareas y el estado en el que se encuentra el objeto de trabajo. Las máquinas más sencillas de programación automatizada son máquinas cuya función correspondiente cesa automáticamente cuando la tarea programada se cumple, o también cuando ocurre una avería en el objeto de trabajo (por ejemplo, cuando se corta el hilo en una máquina tejedora). Como ejemplo de una automatización de programación de alto grado de complejidad, se puede citar el cañón antiaéreo. Calcula automáticamente en qué lugar se encontrará el avión en vuelo después del transcurso del tiempo necesario para alcanzarlo con el proyectil, y apunta al objetivo de manera adecuada. En dicho caso, el programa de la máquina consiste en alcanzar con el proyectil al avión, y la desviación de la norma establecida es la distancia entre el lugar donde se produjo la explosión del proyectil y el lugar en el que se encuentra el avión. El servomecanismo del cañón antiaéreo después de cada disparo corrige las desviaciones por medio de los acoplamientos retroactivos de compensación. Como se ve en este

ejemplo, la programación automatizada puede reducirse a una programación simple. En vez de determinar la norma del cañón antiaéreo, el hecho de alcanzar un lugar en el espacio calculado mediante un mecanismo especial, el cual lleva a cabo la programación de los cañones, se puede definir la norma de una manera más sencilla: cómo dar en el blanco, o sea, alcanzar el avión. Las funciones automáticas que programan el servomecanismo no son en este caso otra cosa que una regulación que corrige las desviaciones de la norma.

La automatización del manejo y regulación de las funciones de la máquina no es nada nuevo. Es una consecuencia directa de la *mecanización,* es decir, del hecho de sustituir la aplicación directa de los instrumentos de trabajo que utiliza el hombre por un mecanismo que acopla la acción de diversos instrumentos de los cuales se compone una máquina. Por esta razón, ya en la Edad Media, el desarrollo de los mecanismos de reloj está unido a la automatización de una serie de funciones diferentes. Como resultado se habían construido muchos mecanismos complejos provistos de dirección y regulación automatizada que indicaban horas y minutos, días y meses, fases lunares y además ejecutaban otras funciones aún: sonar horas, tocar melodías, desfilar figuras, etc. [35]. Ya Marx tomaba en cuenta el hecho de que la automatización es consecuencia de la mecanización [36].

Junto con la automatización de las máquinas existe también automatización de la coordinación del conjunto de máquinas o de

[35] En los mecanismos medievales de reloj la automatización encuentra su aplicación por primera vez en la historia de la técnica material. Lo toma en cuenta J. D. Bernal: «... con el reloj mecánico, que da las horas por sí mismo, nació el prototipo de la moderna maquinaria automática, susceptible de movimiento y regulación propia» (J. D. BERNAL: *La historia social de la ciencia. La ciencia en la historia.* Ed. Península, Barcelona, 1973, p. 263). Los mecanismos automáticos de reloj también fueron conocidos por los árabes, probablemente los tomaron del imperio bizantino. Los autores chinos describen estos mecanismos automáticos que existían entre los árabes en el siglo X, y ellos mismos los construían desde el siglo VII. (Ver J. NEEDHAM: *Science and civilization in China,* Cambridge, 1954, tomo I, pp. 202-204).

[36] C. MARX: *El Capital,* ed. cit., tomo I, p. 311: «Tan pronto como la máquina puede ejecutar sin ayuda del hombre todos los movimientos necesarios para elaborar la materia prima, aunque el hombre la vigile e intervenga de vez en cuando, tenemos un sistema *automático* de maquinaria, susceptible, sin embargo, como es lógico, de constante perfeccionamiento en sus detalles. Así, por ejemplo, el aparato que hace detenerse automáticamente la máquina de hilar en el momento en que se rompe una sola hebra, y el *selfacting stop,* o parada automática del telar a vapor perfeccionado, que entra en acción tan pronto como la canilla de la bobina pierde el hilo, son inventos modernísimos.»

toda la fábrica. Y posteriormente dice: «Mas, para que exista verdadero *sistema de maquinaria* y no una serie de *máquinas independientes* es necesario que el objeto trabajado recorra diversos procesos parciales articulados entre sí como otras tantas etapas y ejecutados por una cadena de máquinas diferentes, pero relacionadas las unas con las otras y que se complementen mutuamente.» Y continúa: «Cada máquina parcial suministra la materia prima a la que le sigue inmediatamente, y como todas ellas trabajan al mismo tiempo, el producto se encuentra recorriendo constantemente las diversas fases del proceso de fabricación, a la par que en el tránsito de una fase de producción a otra» [37]. En conclusión, como dijo Marx ilustrativamente: «La máquina siempre es sustituida por un monstruo mecánico cuyo cuerpo llena toda la fábrica y cuya fuerza diabólica, que antes ocultaba la marcha rítmica, pausada y casi solemne de sus miembros gigantescos, se desborda ahora en el torbellino febril, loco, de sus innumerables órganos de trabajo» [38].

En la primera fase de la aplicación de conjuntos de máquinas cooperantes, la transferencia del objeto de trabajo (del semifabricado) de una máquina a la otra se efectúa mediante la intervención directa del hombre al recibir el objeto de una máquina, transportarlo a otra, colocarlo debidamente, etc. La automatización elimina la necesidad de valerse de este tipo de intervención directa: la transferencia del objeto de trabajo de una máquina a otra queda mecanizada, y esta función es dirigida y regulada automáticamente. De esta manera las máquinas que actúan automáticamente se van unificando en un conjunto de máquinas automatizadas, y los conjuntos de máquinas automatizadas forman una fábrica automatizada. En un conjunto de máquinas automatizadas o en una fábrica automatizada las máquinas individuales están acopladas en un solo mecanismo y realmente constituyen una sola máquina. Este es el grado superior de automatización del proceso productivo. La terminología contemporánea lo designa como la *automatización de complejo* o *automatización total* del proceso productivo en contraste con la automatización parcial, que abarca sólo una máquina individual [39]. En el caso de una automatización total del proceso productivo, el proceso del trabajo se reduce a la pura vigilancia.

[37] C. MARX: *El Capital*, ed. cit., tomo I, pp. 309 y 310.
[38] Idem, pp. 311-312.
[39] Ver *Automatisierung...*, ed. cit., p. 10, así como también F. POLLOCK: *Automation. A Study of its Economic and Social Consequences*, Oxford, 1957, pp. 7-11. (Existe traducción castellana en Ed. Sudamericana.)

V

La mecanización del proceso de trabajo conduce a la sustitución de la elaboración directa del objeto de trabajo por el servicio a la máquina; la automatización de dirección y regulación de la máquina reduce el servicio a la máquina a la vigilancia de ésta, y una automatización total del proceso productivo elimina la necesidad de intervención humana directa al transferir el objeto de trabajo de una máquina a otra. Ahora sólo queda vigilar el transcurso correcto del proceso productivo automatizado. La intervención humana directa se lleva a cabo sólo en caso de que sufra descompostura el mecanismo de ese proceso. Empero, en este campo disminuye la necesidad de ese tipo de intervenciones a consecuencia de haber introducido instalaciones que corrigen automáticamente ciertos desperfectos que ocurren en las máquinas o en los conjuntos de éstas.

La automatización total del proceso productivo es una tendencia que existe dentro del desarrollo de la técnica contemporánea. Tal como lo hemos visto, la automatización es una consecuencia directa de la mecanización y, a su vez, el resultado ulterior de la automatización de cada una de las máquinas respectivas conduce a la automatización de conjuntos enteros de máquinas y de fábricas. La rapidez con que se realice esta tendencia depende solamente de las posibilidades técnicas, y estas posibilidades son creadas de manera amplia por la electromecánica y electrotécnica modernas. Como la automatización nace históricamente de la mecanización, por lo tanto ha abarcado primero aquellas esferas de producción en las que se han empleado máquinas. Las máquinas o los conjuntos de éstas se han convertido en objeto de automatización. Posteriormente, la automatización entró también en la producción química en forma de servomecanismos que regulan automáticamente las condiciones en que transcurre el proceso químico (tales como la temperatura, la presión, la humedad, la afluencia de diversos líquidos, la intensidad de fermentación, etc.). Los dispositivos automáticos comienzan a encontrar su aplicación en la medicina. Hasta ahora, de la manera más débil, la automatización ha podido penetrar en la producción agrícola, aunque también en este campo existen vestigios de regulación automática de las condiciones en las que se lleva a cabo el proceso biológico (p.e., la temperatura y humedad en un invernadero), sin mencionar la automatización de las funciones suplementarias efectuadas por las máquinas. En principio, la automatización puede ser aplicada en todo tipo de sis-

temas acoplados que se presentan en el proceso productivo, tanto en los conjuntos biológicos como químicos, así como también en los mecanismos.

Cuando existe la automatización, el proceso de trabajo se limita a la programación de las funciones y a la iniciación de la acción del mecanismo automático (o de otro sistema de acciones acopladas) y a la vigilancia de su funcionamiento normal. Esta es la aplicación más avanzada del principio de minimalización de la intervención que formuló Kotarbiński: «El postulado de minimalización de la intervención —dice Kotarbiński— conduce al postulado de la vigilancia pura, cuando pretendemos sólo cuidar el proceso automático, en vez de participar en éste por medio de ejercer nuestras presiones» [40]. Durante la automatización de las respectivas máquinas, la vigilancia es interrumpida por una intervención directa, como consecuencia de que existe la necesidad de transferir el objeto de trabajo de una máquina a otra, lo cual denomina Kotarbiński como invigilancia intervencionista. Solamente la automatización total del proceso productivo hace posible la transición a la invigilancia pura cuando el proceso de trabajo consiste (aparte de programar e iniciar la acción) exclusivamente en el cuidado.

La automatización del proceso productivo, por lo tanto, cambia de manera radical el carácter del proceso de trabajo. Cuando los instrumentos se utilizan directamente, el trabajo consiste en emplear la fuerza y la destreza de los músculos del cuerpo humano, el cual es dirigido y regulado por el sistema central del hombre. La mecanización del proceso de trabajo sustituye el trabajo directo de los músculos humanos por la acción del mecanismo de la máquina, y después de introducir el uso del motor (todo tipo de motores), la fuerza física del organismo humano es reemplazada por la energía tomada de la naturaleza. El servicio a la máquina (o de otros sistemas acoplados) exige un gasto mucho menor de fuerza y destreza física del organismo humano del que se necesitaría para elaborar el objeto de trabajo directamente con la ayuda de los instrumentos. Este sigue requiriendo, y frecuentemente en una medida mayor, de un esfuerzo intenso del sistema nervioso central, sobre todo del cerebro; particularmente lo exige la dirección y la regulación de las funciones de la máquina. Por esta razón se puede afirmar que, en tanto la mecanización del proceso del trabajo sustituye la fuerza y

[40] T. KOTARBINSKI: *Traktat o dobrej robocie* (Tratado del buen trabajo), ed. cit., p. 152.

destreza física del organismo humano, de igual modo la automatización del proceso productivo reemplaza una serie de funciones neurosíquicas de éste.

Esto se hace singularmente visible cuando un servomecanismo ejecuta automáticamente las operaciones lógicas y matemáticas (algunas veces muy difíciles para el hombre), así como en las modernas máquinas matemáticas electrónicas, las cuales juegan el papel clave durante la dirección (el manejo) y regulación de funciones de las máquinas, así como también de otros sistemas de acciones acopladas empleadas en el proceso productivo. De ahí que a este tipo de aparatos se les denomine «cerebros artificiales» [41].

Este cambio del carácter del proceso productivo lo toma en cuenta J. D. Bernal, quien afirma que la automatización significa una nueva revolución en el proceso de trabajo, en comparación con la mecanización: «El progreso técnico del siglo XX indica que nos hallamos inmersos en una segunda o tal vez tercera gran revolución industrial (...). Por otra parte, mientras que la Gran Revolución Industrial se ocupó principalmente de la producción y transmisión de la energía, liberando al hombre, en principio, del pesado trabajo muscular, la revolución del siglo XX se da en gran medida en la sustitución de la habilidad o destreza del trabajador por la máquina o el aparato electrónico, liberando a aquél de las pesadas tareas administrativas o del cuidado de las máquinas» [42].

Como afirma otro investigador de la automatización, Federico Pollock: «Por primera vez desde los albores de la época industrial son inventadas máquinas que reemplazan no sólo el esfuerzo de los músculos humanos, sino también las funciones desempeñadas por sus sentidos y por su cerebro» [43]. Aun antes lo había considerado Norbert Wiener, que lo expresó de esta manera: «La primera revolución industrial, la revolución de las llamadas "negras hilanderías satánicas", supuso la desvalorización del brazo humano

[41] Se debe mencionar aquí que existe una gran analogía entre la acción de estos aparatos y la acción del sistema nervioso central. La base de esa analogía la constituye el carácter eléctrico de los procesos nerviosos, así como también el papel que desempeñan los acoplamientos retroactivos, tanto en el sistema nervioso central como en los aparatos matemáticos. El primero que tuvo en cuenta esta analogía, y también el hecho de que ésta puede facilitar la comprensión de la acción del sistema nervioso central, fue Norbert WIENER (*Cybernetics...*, capítulos V y VII). De esa analogía, así como también de las diferencias existentes, se ocupó el destacado matemático John von NEUMANN (La máquina matemática y el cerebro humano), Varsovia, 1963.

[42] J. D. BERNAL, *Historia social de la ciencia. La ciencia en nuestro tiempo*, tomo II. Península, Barcelona, 1973, p. 16.

[43] F. POLLOCK, *Automation...*, ed. cit., p. 39.

en competencia con la máquina... La moderna revolución industrial se limita similarmente a desvalorizar el cerebro humano, al menos en sus decisiones más simples y rutinarias» [44].

Hasta cierto punto es cuestión de terminología si la revolución efectuada por la automatización del proceso productivo se puede definir como la segunda revolución industrial. Existen razones de peso en contra del empleo de este término [45]. No cabe duda, sin

[44] Norbert WIENER, *Cibernética*, ed. cast. cit., p. 62. Wiener, como después de todo se deduce también de la formulación de la cita mencionada, expresa su temor en cuanto a los resultados socialmente negativos de la automatización del proceso productivo en condiciones del capitalismo. En la cuestión de esos resultados sociales llega a la siguiente conclusión: «La respuesta, por supuesto, es tener una sociedad basada en valores humanos que no sean el comprar y el vender» (idem, p. 62).

[45] El término «revolución industrial» ha sido utilizado por ENGELS en el trabajo publicado en 1845 *La situación de la clase obrera en Inglaterra* (Ed. Akal, Madrid, 1976, pp. 39 y 47). Este término define el ampliamente divulgado proceso de mecanización del trabajo, el cual se llevó a cabo en Inglaterra a fines del siglo XVIII y principios del siglo XIX y que constituyó la base tecnológica de la transición de la manufactura a la gran industria. Posteriormente MARX empleaba ese término (por ejemplo, en *El Capital*, t. I, pp. 303 ss. y 356). No obstante, este término le debe su divulgación al historiador inglés Arnold TOYNBEE, el cual en el año 1884 publicó el libro *Lectures on the Industrial Revolution in England*. Posiblemente Toynbee tomó el término «revolución industrial» de Marx. Como afirma Herbert HEATON en su artículo *Industrial Revolution* (en la Encyclopaedia of the Social Sciences, t. VIII, Nueva York, 1948, p. 53), Toynbee conocía *El Capital* de Marx y había estudiado el movimiento socialista alemán. En aquel tiempo, sin embargo, se estaba escribiendo mucho sobre «la revolución» que tenía lugar en la producción industrial, de manera que Toynbee también pudo haber tomado este término de otra fuente. Este era un término usado comúnmente. La definición de la automatización del proceso productivo como una segunda revolución industrial ha sido, como hemos visto antes, usada por Wiener, Bernal y otros. Hoy día dicho término está de moda. No obstante, hay que observar que este nombre ya anteriormente —en los años 20— había sido utilizado para designar grandes transformaciones tecnológicas, que, en aquel entonces, se vinculaban con la llamada racionalización de la producción. Esta racionalización consistía en introducir y propagar los métodos de la producción masiva, principalmente, por medio del trabajo en cadena, así como también en aplicar los métodos científicos en el campo de la organización de la producción. Para esta cuestión véase Otto BAUER, *Kapitalismus und Sozialismus nach dem Weltkriege*, t. I, Rationalisierung und Fehlrationalisierung, Berlín, 1931, pp. 161-169. En relación a eso, Bernal, como se deduce de la cita arriba mencionada, duda acerca de si se debe hablar de dos o de tres revoluciones industriales. La primera es una aplicación amplia de máquinas, el paso de la manufactura a la gran industria; la segunda es la divulgación de la producción en masa; la tercera es la automatización del proceso productivo *(Historia social...*, tomo II, ed. castellana citada, pp. 16-17, 88 y 97). No cabe duda que el desarrollo de la técnica contemporánea de producción atravesaba por una serie de etapas más o menos definidas y que el hecho de ingresar en cada una de éstas constituía una revolución sui géneris en el proceso productivo. Lo toma en cuenta SCHUMPETER en su obra *Business Cycles*, que, entre otras, contiene la historia del desarrollo del capitalismo presentada sobre el fondo de las transformaciones que se efectuaban en la técnica de producción. Schumpeter afirma que a fines del siglo XIX y a principios del XX se llevó a cabo la segunda revolución industrial, la cual consistía en aplicar en la industria la electricidad como una forma de energía

embargo, de que la automatización del proceso productivo constituye «un salto cualitativo», una revolución como proceso productivo social. La aplicación de los instrumentos en el proceso del trabajo y, sobre todo, instrumentos altamente especializados, amplía el alcance y la eficiencia de los órganos del cuerpo humano y crea nuevos órganos artificiales que el hombre utiliza. La introducción de las máquinas, es decir, la mecanización del proceso de trabajo, aumenta la eficacia, así como también la potencia de los instrumentos de trabajo y permite llevar a cabo otras funciones, cuyo cumplimiento era imposible lograr con la ayuda de los instrumentos antiguos. Finalmente, la automatización del proceso productivo aumenta el alcance y eficiencia de las funciones neurosíquicas del hombre, dándole la posibilidad de efectuar funciones nuevas que antes resultaban irrealizables. La mecanización del proceso de trabajo aumenta, en cierto modo, la fuerza y la destreza del organismo humano, y la automatización del proceso productivo hace incrementar la potencia y la capacidad del cerebro humano.

(según él la primera revolución industrial consistía en la aplicación del vapor). Finalmente, de acuerdo con Schumpeter, en los años de este siglo, sobrevino la tercera revolución industrial, cuya base la constituía el petróleo y la gasolina utilizados en los motores de combustión (Ver SCHUMPETER, *Bussines Cycles*, Nueva York y Londres, 1939, t. I, pp. 397-398 y t. II, pp. 753-794). Es evidente que Schumpeter, tomando por base la diferenciación de las revoluciones «industriales» consecutivas, toma en cuenta el aprovechamiento de los nuevos tipos de energía, y no los cambios que se efectúan en el carácter social del proceso del trabajo. Por esta razón, su concepción no es útil, ya que omite el aspecto más esencial del proceso de producción social. El hecho de determinar la automatización como la segunda revolución industrial está tanto más fundamentado en cuanto se refiere a una verdadera revolución dentro del carácter social del proceso del trabajo. Esta revolución, sin embargo, constituye una transformación menos profunda dentro del proceso productivo que la revolución que se produjo a fines del siglo XVIII y principios del XIX, la cual fue el resultado de la mecanización del proceso de trabajo. Aquella revolución fue la que engendró la gran industria y constituyó la base del progreso histórico de la industrialización. La automatización del proceso productivo, en cambio, es una revolución que se está llevando a cabo dentro del marco de la gran industria que ya existe y constituye un proceso de perfeccionamiento de su eficiencia. Es por eso por lo que el hecho de hablar de la automatización como de una segunda revolución industrial parece fuera de lugar porque borra la especificidad histórica de la revolución industrial, la cual había constituido la base de la industrialización. También es necesario señalar que la revolución industrial, que había dado origen a la gran industria, estaba vinculada estrechamente con el surgimiento del modo de producción capitalista y como consecuencia al surgimiento de una formación social nueva. En cambio, la revolución provocada por la automatización se está efectuando, tanto en los países con modo de producción socialista como capitalista. De manera más intensa, ésta se lleva a cabo en la Unión Soviética y en los Estados Unidos. Su significado social e histórico es por lo tanto diferente.

VI

El empleo de los medios de trabajo requiere, por lo general, la colaboración colectiva de un número mayor de personas. Sólo instrumentos muy simples pueden ser utilizados por un solo hombre; el proceso productivo se denomina entonces artesanía individual. Cuando los instrumentos son más complejos, tratándose especialmente de los instrumentos especializados, maquinaria, y de los conjuntos de máquinas, así como también cuando se utilizan otros sistemas de acciones acopladas —como, por ejemplo, en la producción agrícola o química— es necesario efectuar tantas funciones diferentes que un solo individuo no podría dar abasto. Surge la necesidad de efectuar estas funciones colectivamente, es decir, mediante el trabajo de conjunto. Por esta razón, durante el proceso productivo aparecen conjuntos de personas que emplean una determinada cantidad de medios de trabajo (de instrumentos y dispositivos suplementarios) para la transformación de los objetos de trabajo. Este tipo de conjunto se llama *empresa de producción* [46]. Las empresas de producción se designan con diversos nombres, tales como: granja agrícola, taller artesanal [47], empresa industrial, compañía de transportes, etc.

En una empresa de producción cada una de las funciones, o sea, de los trabajos individuales concretos, se encaminan de común acuerdo hacia un objetivo común, es decir, hacia la fabricación del producto (o productos). Esta unificación de funciones individuales que tiende a alcanzar un fin común se denomina *coordinación* de estas funciones. La coordinación de las funciones efectuadas por cada una de las personas individualmente la llamamos *cooperación*. Diferenciamos, además, la cooperación simple que consiste en una mera unión de los esfuerzos de una cierta cantidad de personas para obtener un resultado determinado en el proceso productivo (como, por ejemplo, el transportar cargas, cavar zanjas, etc.), de la cooperación considerada como *división del trabajo*. Durante la división del trabajo se opera la especialización de las funciones de los individuos; cada una de las personas ejecuta una parte determinada de las funciones necesarias para la fabricación del producto. De esta manera, cuando existe la cooperación entre los individuos,

[46] En alemán, *Betrieb;* en ruso, *zawod;* en inglés, *plant.*

[47] Con el nombre de artesanía designamos la producción industrial que utiliza instrumentos sencillos y pequeñas máquinas que pueden ser manejadas por un número reducido de personas, y a veces por una sola.

el trabajo se convierte en una parte del trabajo total del conjunto humano. El individuo, de acuerdo con la definición de Marx, se convierte en un «obrero parcial» o en una parte del «obrero colectivo», como lo es el conjunto de personas que trabajan en una empresa de producción [48].

La necesidad de coordinar las funciones individuales en una empresa de producción conduce al nacimiento de un tipo especial de funciones, origina un tipo especial de trabajo concreto, o sea, el trabajo dirigente o, mejor dicho, dirección: «El trabajo de alta vigilancia y dirección responde a una necesidad en todas aquellas ramas en que el proceso directo de producción adopta la forma de un proceso socialmente combinado y no la de un trabajo aislado de los productores independientes» [49]. Esto es imprescindible porque: «En todos los tipos de trabajo, en los que colabora un número considerable de individuos, la ligazón y unificación del proceso tienen que ser necesariamente representadas por una sola voluntad o funciones que no conciernen a los trabajos parciales, sino a la totalidad de las actividades del taller, de la misma manera como lo podemos observar en caso de un director de orquesta» [50].

El trabajo de dirección puede ser efectuado por un individuo (dirección unipersonal) o por un conjunto de personas (dirección colegiada). Las personas que ejecutan el trabajo de dirección frecuentemente en su labor utilizan la colaboración de otras personas, que recopilan, conservan y transmiten informaciones sobre las labores que se llevan a cabo en una empresa de producción. Estas personas (como, por ejemplo, los tenedores de libros, las secretarias, los mensajeros) llevan el nombre de personal auxiliar. Estas funciones son indispensables para el trabajo de dirección y, por lo tanto, las consideramos parte de ese trabajo [51].

El trabajo de dirección se caracteriza por el hecho de que su

[48] Ver C. MARX, *El Capital,* ed. cit., tomo I, pp. 263, 265, 276 ss. Marx emplea las palabras «Teilarbeiter» y «Gesamtarbeiter». En el tercer tomo de *El Capital* (ed. cit., parte I, p. 115) Marx habla del obrero «combinado» (Kombinierter Arbeiter).

[49] *El Capital,* t. III, parte I, p. 367. En la traducción polaca se emplea la palabra «administración» en lugar de «dirección». No obstante, la expresión «dirección» ilustra mejor aquí el contenido de la palabra «Leitung» que ha sido usada en el original.

[50] Idem. De manera similar ENGELS fundamenta la necesidad de dirección en «De la autoridad». C. MARX y F. ENGELS, *Obras escogidas,* ed. Akal, Madrid, 1975, pp. 668-671.

[51] El personal dirigente auxiliar se denomina frecuentemente personal administrativo, y el trabajo efectuado por éste, trabajo de administración.

objeto directo no es un objeto material de trabajo que está siendo transformado durante el proceso productivo, sino las funciones de personas que transforman el objeto de trabajo [52]. El trabajo dirigente ejerce su influencia sobre las funciones de estas personas, establece cuáles son las funciones que ejecuta cada una de dichas personas y coordina las funciones respectivas. De esa manera, el trabajo de dirección influye indirectamente sobre el proceso de transformación del objeto de trabajo.

Por esta razón en una empresa de producción, tanto el trabajo dirigente como el trabajo efectuado por las personas que transforman directamente el objeto de trabajo, son trabajos productivos. «Es éste un trabajo productivo cuya necesidad se plantea en todo régimen combinado de producción» [53]. Sin embargo, puesto que la influencia que el trabajo dirigente ejerce sobre la transformación del objeto es indirecta, lo designaremos trabajo *productivo indirecto.*

El trabajo dirigente está ligado al llamado *trabajo conceptual,* que consiste en la determinación de las funciones de los individuos ocupados en la transformación del objeto de trabajo, o sea, como decimos, en la *programación* de estas funciones. Esta programación abarca la tarea de establecer: productos que deben ser fabricados, material que debe servir como objeto de trabajo, instrumentos que se van a utilizar, así como también el modo de aplicación y el manejo de éstos. El trabajo conceptual de este tipo constituye una parte del trabajo de dirección. Frecuentemente surge un conjunto independiente de personas que efectúan el trabajo conceptual; sobreviene entonces, la división del trabajo dirigente en trabajo dirigente ejecutivo y en trabajo conceptual. Marx llama al trabajo conceptual «trabajo general» y dentro de éste incluye todo trabajo científico, todo descubrimiento, todo invento [54].

[52] Lo toma en cuenta Kotarbiński. Al escribir sobre la cuestión más amplia del llamado trabajo intelectual, afirma que fruto de éste es el estado del hombre como persona sensitiva, y el material bruto el estado de este hombre antes de haber efectuado la acción intelectual. Ver *Traktat o dobrej robocie* (Tratado del buen trabajo), ed. cit., p. 272. En un caso particular del trabajo dirigente, el material bruto, es decir, el objeto de trabajo, lo constituyen las funciones efectuadas por otras personas; el producto de éste son las funciones efectuadas por las mismas personas subyugadas a la dirección.

[53] C. MARX, *El Capital,* ed. cit., t. III, parte I, p. 367.

[54] Idem, p. 115.

Se diferencia frecuentemente el llamado trabajo intelectual y se opone a éste el llamado trabajo físico. En realidad, esta división es difícil de establecer por la razón de que cualquier trabajo, en esto también el trabajo físico, que consiste en emplear la fuerza y la destreza de los músculos del cuerpo humano, requiere una acción del sistema nervioso central del hombre, al igual que una consciencia del fin

La separación del trabajo dirigente, así como también la distinción eventual del trabajo conceptual que existen en una empresa de producción, son parte de la división del trabajo entre las personas empleadas en la misma. En una empresa de producción, la división del trabajo constituye la base del desarrollo moderno de las fuerzas productivas. Ya Adam Smith afirma con las siguientes palabras: «El mayor adelanto realizado en la capacidad productiva del trabajo, y la parte mayor de aptitud, destreza y discernimiento con que es dirigido o aplicado en todas partes, parecen haber sido consecuencia de la división del mismo» [55]. Adam Smith enumeró también los factores que causan el incremento de la cantidad de productos como efecto de la aplicación de la división del trabajo. «Este considerable aumento en la cantidad de obra que es capaz de realizar el mismo número de personas, como consecuencia de la división del trabajo, se debe a tres circunstancias distintas: primera, el aumento de destreza de cada uno de los operarios; segunda, el ahorro de tiempo que suele perderse cuando se cambia de una clase de tarea a otra distinta; y, finalmente, a la invención de un gran número de máquinas que facilitan y abrevian el trabajo, capacitando a un hombre para realizar la tarea de muchos» [56].

En particular, la mecanización del proceso productivo y ulteriormente su automatización están indivisiblemente unidas al desarrollo del trabajo en una empresa de producción.

Cierta división del trabajo ya existía desde los tiempos remotos en las granjas agrícolas, así como también en los talleres artesanales multipersonales, pero el desarrollo de la división del trabajo está vinculado al desarrollo de la industria moderna, cuyo surgimiento, como sabemos, está ligado a la formación y desarrollo del modo de

requiere voluntad y concentración. «... además de esforzar los órganos que trabajan, el obrero ha de aportar esa voluntad *consciente del fin* que llamamos *atención...*». (*El Capital*, ed. cit., t. I, p. 131.) Por lo mismo, Marx define, con acierto, el trabajo como «... un gasto productivo de cerebro *humano*, de músculo, de nervios, de brazos, etc.» (Idem, p. 11). Cuando mucho, se puede decir que los trabajos concretos, individualmente, son más o menos «intelectuales» o «físicos». No obstante, cuando existe la mecanización, y sobre todo la automatización del proceso productivo, todo trabajo —en vista de que se reduce, cada vez más a la vigilancia— va adquiriendo progresivamente un carácter «intelectual»... En cambio la diferenciación del trabajo de dirección y dentro del mismo el trabajo conceptual, que consiste en la programación, está basado en un criterio conciso. Este criterio se desprende del hecho de que el objeto de trabajo de dirección junto con el trabajo conceptual, no lo constituye directamente el objeto material que ha sido transformado durante el proceso productivo, sino las funciones efectuadas por otras personas son las que constituyen este objeto.

[55] A. SMITH, *La riqueza de las naciones*. Aguilar, Madrid, 1961, p. 9.

[56] Idem, p. 12.

producción capitalista. El principio de este desarrollo lo constituye el surgimiento de la *manufactura,* o sea, el taller donde se manufacturaban los productos; éste era una empresa de producción que empleaba a un gran número de personas; dentro de la cual se opera la transformación de la cooperación simple en una cooperación que consiste en la aplicación de la división del trabajo al utilizar herramientas simples, instrumentos simples, así como también, un número reducido de máquinas que se ponían en marcha en forma manual [57]. La división del trabajo desarrollado dentro del marco de

[57] Algunas personas piensan que las manufacturas se originaron en los ergástulos griegos; éstos eran talleres artesanales que empleaban decenas y, a veces, hasta centenares de trabajadores, en su mayoría, esclavos. Como por ejemplo, Lujo BRENTANO, *Das Wirtschaftsleben der antiken Welt,* Jena, 1929, p. 36,47-50,81. Como testimonio pueden servir aquí las observaciones de Jenofonte sobre la especialización minuciosa que existía en la producción artesanal. Parece, sin embargo, que estas observaciones se refieren más bien a la especialización que existía entre los talleres de trabajo y no dentro de éstos, lo cual constituye una característica de la manufactura. Max Weber caracteriza el ergástulo de la siguiente manera: «Un ergástulo se puede *dividir* de manera optativa (vendiendo una parte de esclavos) exactamente como si se tratara de un bloque de plomo, porque éste es un conglomerado homogéneo de *trabajadores esclavizados* y no constituye una organización de trabajo heterogénea (Agrarverhältnisse im Altertum, Gesammelte Aufsätze zur Sozial-und Wirtschaftsgeschichte, Tübigen, 1924, p.9. También ver Max WEBER, *Wirtschaftsgeschichte,* Berlín, 1958, p.121). De una manera similar presenta el ergástulo N. MASHKIN: «El ergástulo griego nada tiene en común con una fábrica. Sólo aparentemente recuerda la manufactura, porque en la antigüedad no encontramos el rasgo que caracteriza a ésta, es decir, al obrero total, quien se compone de muchos obreros parciales» (K voprosu ob ekonomicheskoy zhizni Gretsyi klasicheskovo perioda) Drievniaya Grecia, Moscú, 1956, p.248). Junto con la caída de la formación social antigua y la desaparición de la esclavitud masiva, también han desaparecido los ergástulos por falta de obreros. Durante la Edad Media la producción se llevaba a cabo en pequeños talleres artesanales. El sistema gremial sancionaba este estado de cosas prohibiendo sobrepasar un número reducido de aprendices y oficiales. Las manufacturas no aparecen apenas sino hasta los siglos XIV y XV, en la producción textil que existía en Italia y en Flandes. En la segunda mitad del siglo XVI, y sobre todo en los siglos XVII y XVIII, se produce un incremento del número de las manufacturas en Escocia e Inglaterra, así como también en Francia. Las manufacturas constituyen la primera etapa del desarrollo del modo de producción capitalista, están organizadas por los capitalistas y se basan en el empleo de obreros asalariados. El desarrollo de las manufacturas está vinculado al proceso que Marx denominó acumulación originaria (ver MARX, *El Capital,* ed. cit., t. I, p. 607 y las siguientes). Como resultado de ese proceso surge una numerosa clase de obreros asalariados. El papel principal lo jugaron aquí las expropiaciones de los campesinos de sus tierras que se había producido en los siglos XVII y XVIII. Estas cobraron una intensidad singular en el siglo XVIII en Inglaterra debido a que los terratenientes se habían apropiado de las parcelas comunales (estos terrenos habían sido cercados por los terratenientes, de ahí viene el nombre «enclosure of commons»). Este proceso lo describe MARX *(El Capital,* t.I, pp.610-624). Sobre este tema consultar también M. DOBB, *Studies in the Development of Capitalism,* Londres, 1947, pp. 221-242 (traducción castellana: *Estudios sobre el desarrollo del capitalismo.* Siglo XXI, Madrid, 1976, pp. 265-288); en el mismo trabajo Dobb describe el proceso de surgimiento de las manufacturas. El problema de asegurarse la mano de obra para las manufacturas constituye uno de

la manufactura creó una base para la mecanización del proceso productivo, hizo posible la introducción de máquinas, y, al mismo tiempo, estimuló la inventiva dentro de ese campo. Como resultado surgió la fábrica, que era un tipo de empresa de producción característica de la industria contemporánea, donde el proceso productivo se lleva a cabo mediante la aplicación de máquinas de varios tipos [58].

los problemas centrales en la literatura económica mercantil en los siglos XVII y XVIII. En algunos países que trataban de igualarse a los países de Europa Occidental en su desarrollo de producción industrial, cuando faltaban obreros asalariados, se establecían manufacturas que empleaban siervos como obreros. Esto sucedía principalmente en Rusia en los siglos XVII y XVIII. En el seno de las manufacturas en que trabajaban los siervos empezaron, sin embargo, a surgir paulatinamente las relaciones de producción capitalistas, lo que toma en cuenta S. G. STRUMILIN (*Ocherki ekonomicheskoy historii Rossii,* Moscú, 1960, capítulo IV). En el siglo XVIII en Polonia surgían las llamadas manufacturas magnates (latifundistas) basadas en el trabajo de los campesinos-siervos. Una descripción de este tipo de manufacturas la da Witold KULA [*Szkice o manufakturach w Polsce XVIII wieku* (Esbozos sobre las manufacturas existentes en Polonia durante el siglo XVIII)], Varsovia, 1956, t. I y II). Empero, también dentro de estas manufacturas se llevaba a cabo la independización de los siervos, se debilitaba la dependencia de éstos y se operaba el paso a las condiciones de trabajo asalariado (ídem, p.28). De esa manera, las manufacturas en que trabajaban los siervos constituían un estadio de transición hacia las manufacturas capitalistas, aunque por lo general éstas terminaban fracasando. En China, donde el desarrollo social se llevaba a cabo aisladamente en relación al desarrollo de Europa, ya durante la dinastía Sung, procedente del norte (fines del siglo X hasta principio del siglo XII) existían manufacturas, en su mayoría imperiales, que empleaban a los obreros asalariados. En los tiempos de la dinastía Ming, desde la segunda mitad del siglo XIV hasta mediados del siglo XVII), ocurrió el florecimiento de las manufacturas, siendo éstas también particulares, especialmente en el campo de la manufactura textil de seda y en la fabricación de porcelana. Estas manufacturas estaban basadas en el trabajo asalariado. Consultar *Dzieje Chin* (La historia de la China) en la red. de Shang Jue, traducción polaca, Varsovia, 1960, p.293, así como también las p.p.446-451). Esto nos podría dar una idea acerca de los principios espontáneos del desarrollo del capitalismo en China, que, sin embargo, no condujeron al desarrollo total del modo de producción capitalista.

[58] El surgimiento y desarrollo de la fábrica constituye la base de la revolución industrial, la cual, ha sido mencionada anteriormente (nota 45). Esto está vinculado a una serie de inventos, que hicieron posible la mecanización de los procesos de trabajo que se aplicaban en las manufacturas. Los inventos principales tenían lugar en Inglaterra dentro de la industria textil y se concentraron en un muy breve lapso de tiempo. Alrededor del año 1765, James Hargreaves inventó una máquina tejedora llamada *spinning-jenny,* que fue patentada por él en 1770. En 1769, Richard Arkwright inventó la máquina tejedora con propulsión mecánica hidráulica (llamada *water-frame*). Ambos inventos fueron perfeccionados en 1779, en forma de una nueva máquina tejedora, llamada *spinning-mule* de Samuel Crompton. Finalmente en el año 1792, William Kelly introdujo una máquina tejedora automática, llamada *self-actor.* Un poco después llegó la mecanización de la industria textil. Aunque bien es verdad que aún en 1773, John Kay inventó la lanzadera mecánica, pero no fue sino hasta la construcción de un telar mecánico inventado por Edmundo Cartwright en 1787 que se produjo un cambio radical profundo. Las máquinas inventadas requerían, sin embargo, una fuerza propulsora. Esta fuerza había llegado en forma de máquina de vapor. En el año 1769, James Watt patentó la

La amplia mecanización del proceso productivo y el surgimiento de la fábrica como un nuevo tipo de empresas de producción significa que desde entonces el desarrollo de las fuerzas productivas consiste no tanto en el perfeccionamiento de la pericia y capacidad de los obreros en relación a la división de trabajo, que era lo que sucedía en los tiempos de la manufactura, como en el perfeccionamiento y en la introducción de nuevos medios de trabajo en forma de máquina. «En la manufactura, la revolución operada en el régimen de producción tiene como punto de partida la *fuerza de trabajo;* en la gran industria, el *instrumento de trabajo*» [59].

En una fábrica, la necesidad de pericia y la capacidad del obrero disminuye, el trabajo se reduce al manejo de las máquinas y la división del trabajo se adapta a la especialización de las mismas [60]. Finalmente, la mecanización del proceso productivo en la fábrica

máquina de vapor, que había sido introducida en la práctica por él mismo un poco antes. Las máquinas de vapor se conocían anteriormente, porque ya se usaban a fines del siglo XVII, pero casi exclusivamente para el bombeo de agua. Sólo la máquina de Watt encontró una aplicación amplia en la industria, inicialmente en la industria textil, y posteriormente en la producción de hierro. Como observa Marx, esto sucedió por la razón de que solamente el surgimiento de las máquinas-herramientas creó la demanda para una aplicación amplia de la máquina de vapor. Ver MARX, *El Capital,* ed. cit., t. I, p. 304, donde leemos: «De esta parte de la maquinaria, de la máquina-herramienta, es de donde arranca la revolución industrial del siglo XVIII. Y es aquí donde tiene todavía su diario punto de partida la transformación constante de la industria manual o manufacturera en industria mecanizada.» Y más adelante (p.306): «Fue, por el contrario, la creación de las máquinas-herramientas la que obligó a revolucionar la máquina de vapor.» El desarrollo de la maquinaria produjo la demanda de hierro. El incremento de la producción de hierro se hizo posible gracias al proceso de fundición de éste con ayuda de coque en lugar de carbón de madera que se utilizaba antes. Este proceso fue inventado por Abraham Darby ya en 1735. En 1784, Henry Cort introdujo un proceso nuevo de pudelar *(puddling)* el hierro introduciendo simultáneamente el procedimiento de laminado, que ocupó el lugar de la antigua forja de éste. Esto hizo posible una producción masiva de hierro de alta calidad, así como también fomentó el desarrollo de la producción de máquinas. No obstante, la fabricación de máquinas era manufacturada. Sólo cuando Henry Mandslay inventó, en 1717, una fresadora para metales provista de un tornillo de tracción de mando se abrió el camino hacia la mecanización también dentro de la industria de construcción de maquinaria. La revolución industrial dio origen a la fábrica, que sustituye a las manufacturas (convirtiendo frecuentemente una manufactura en fábrica) y gradualmente fue suplantando a la artesanía. El surgimiento de la fábrica constituye —después de las manufacturas— la etapa ulterior del desarrollo del modo de producción capitalista. Como resultado, la fábrica se convirtió en el tipo principal de empresa de producción en el mundo de producción capitalista. El modo de producción socialista heredó la fábrica como legado del sistema capitalista y las nuevas empresas de producción también se construyen en forma de fábricas.

[59] C. MARX, *El Capital,* ed. cit., t. I, p. 302.

[60] Idem, p. 347: «Cuando reaparece en la fábrica automática la *división del trabajo* es siempre con el carácter primordial de *distribución de los obreros entre las máquinas especializadas.*»

moderna hace posible la automatización de éste. El resultado de la automatización constituye, como sabemos, la reducción del proceso de trabajo a la pura vigilancia de éste, efectuada por la empresa de producción automática.

VII

La empresa de producción fabrica un producto determinado o algunos productos determinados. De acuerdo con los productos fabricados clasificamos los establecimientos de trabajo como pertenecientes a los sectores especiales de producción: la agricultura, la industria, el transporte, el almacenamiento y posteriormente a las subdivisiones de producción especializadas, o sea a las ramas de la producción, tales como son, por ejemplo: la industria electrotécnica, química o textil. De esta manera, entre las diferentes empresas de producción existe la división del trabajo, al igual que la cooperación, que reside en que una empresa de producción utiliza un producto elaborado por otra empresa como materia prima necesaria para su propio proceso de producción. Además de la división del trabajo dentro del establecimiento productivo existe una división del trabajo más amplia; ésta es la división del trabajo en toda la sociedad. La división del trabajo en la sociedad se manifiesta en forma de división del trabajo y de cooperación existente entre diferentes empresas de producción. La división del trabajo entre las empresas de producción y la división del trabajo dentro de la misma constituyen diferentes escalones de división del trabajo que el existente entre los miembros de la sociedad humana [61], es decir de *la división social del trabajo.* Estos escalones Marx los caracteriza de la siguiente manera: «Si nos fijamos en *el trabajo mismo,* podemos considerar la división de la producción social en sus grandes sectores, la agricultura, la industria, etc. como *división del trabajo en general,* la clasificación de estos sectores de producción en categorías y subcategorías como *división del trabajo en particular,* y la división del trabajo establecida dentro de un taller como *división del trabajo en el caso concreto»* [62].

[61] Ver O. LANGE, *Economía Política,* t. I, ed. cit., p. 38.

[62] C. MARX, *El Capital,* t. I, p. 285. Marx emplea de una manera poco uniforme la expresión «división social del trabajo». En la página 9 del t.1 de *El Capital* esta expresión tiene una significación amplia que abarca tanto la división del trabajo entre los establecimientos productivos como la división del trabajo dentro de un establecimiento productivo. Allí leemos que la división social del trabajo es: «con-

El desarrollo y la diversificación de la división social del trabajo, así como también la distinción que existe entre los diferentes escalones de ella, están unidos no sólo al desarrollo de las fuerzas productivas, sino también al desarrollo de los modos sociales de producción. En la economía natural que predominaba en los modos de producción precapitalistas, aún no existía ni la división del trabajo ni la cooperación entre las empresas de trabajo. En aquel tipo de economía la empresa de trabajo era sustituida por toda la comunidad primitiva: la comunidad aldeana (como por ejemplo, sucedía en la antigua India), «el antiguo domus» (el *oikos* griego o bien la *familia* romana), el castillo feudal (por ejemplo, *manor* inglesa). Todas las funciones productivas se llevan a cabo dentro de la comunidad aldeana, del domus o mansión; es decir, dentro de las *unidades económicas,* como las llamamos generalmente. Las funciones productivas establecidas conscientemente y con un fin preconcebido son coordinadas por la dirección de la unidad económica y los productos de ésta se consumen dentro de la misma; sólo ocasionalmente existe el intercambio de productos entre las diferentes unidades económicas. Más tarde, simultáneamente con el desarrollo de las relaciones mercantiles, empiezan a separarse los respectivos establecimientos de trabajo del resto de la economía: nacen los diferentes escalones de la división social del trabajo. Junto con la cooperación y la división del trabajo que existen dentro de una empresa de producción surgen la división del trabajo y la cooperación entre las empresas de producción.

La cooperación y la división del trabajo que existe dentro de una empresa de producción, y aun antes, dentro de una unidad económica productiva para satisfacer directamente las necesidades de las personas que laboraban allí, tienen —como ya lo hemos su-

dición de vida de la producción de mercancías, aunque ésta no lo sea, a su vez, de la división social del trabajo. Así, por ejemplo, la comunidad de la India antigua supone una división social del trabajo, a pesar de lo cual los *productos* no se convierten allí en *mercancías.* O, para poner otro ejemplo más cercano a nosotros: en toda fábrica reina una división sistemática del trabajo, pero esta división no se basa en el hecho de que los obreros cambien entre sí sus *productos* individuales». En cambio, en la página 285 Marx habla sobre la relación que existe entre «la división del trabajo *en la manufactura* (en el original alemán: «manufakturmässige Teilung der Arbeit») y la división del trabajo *en la sociedad,* como base general de la producción de mercancías». Igualmente en la página 286. Aquí «la división del trabajo dentro de la sociedad» tiene una significación estrecha que abarca solamente la división del trabajo que existe entre las diferentes empresas de producción. Yo empleo la expresión «división del trabajo dentro de la sociedad» en el sentido amplio de la palabra, y ésta se extiende a todos los escalones de división del trabajo que existen entre los miembros de la sociedad.

brayado— carácter consciente y un fin preconcebido, siendo coordinadas a la vez todas las funciones por la dirección del establecimiento o de la unidad económica. En cambio, la división del trabajo y la cooperación que existen entre las diferentes empresas de producción, que surgen junto con el desarrollo de las relaciones de producción, se forman de manera espontánea. Esto sucede especialmente durante el modo de producción capitalista, en el cual las relaciones mercantiles alcanzan su pleno desarrollo. En el modo de producción capitalista también se manifiesta plenamente la contradicción que existe entre la división del trabajo dentro de una empresa de producción y la que existe entre las diferentes empresas de producción. Marx caracteriza esta contradicción con las siguientes palabras [63]: «La norma que en el régimen de división del trabajo dentro del taller se sigue, *a priori,* como un plan preestablecido, en la división del trabajo dentro de la sociedad, sólo rige *a posteriori,* como una ley natural interna, muda, perceptible tan sólo en los cambios barométricos de los precios del mercado y como algo que se impone al capricho y a la arbitrariedad de los productos de mercancías.» Engels define este estado de cosas como [64] «contradicción que hay entre la organización de la producción en una fábrica respectiva y la anarquía de la misma dentro de toda la sociedad».

Ciertas tentativas de superar esta contradicción aparecen aun dentro del marco de producción capitalista en forma de acuerdos que coordinan la actividad de un número mayor de empresas de producción (por ejemplo, cartels), tratando de unificar a empresas de producción bajo la misma administración (trusts, consorcios), así como también en forma de la acción coordinadora del Estado. La propiedad privada de los medios de producción constituye, sin embargo, una barrera para este tipo de tentativas, limitando su radio de alcance de tal modo que la división del trabajo y la cooperación que existen entre los distintos grupos de empresas de producción siguen siendo arbitrarias. Solamente el modo de producción socialista introduce una coordinación total entre las actividades de todos los establecimientos productivos que existen dentro de la sociedad. Esta coordinación se logra mediante la *planificación de la economía social* [65]. La planificación le confiere a la división del tra-

[63] C. MARX, *El Capital,* ed. cit., t. I, pp. 289-290.
[64] F. ENGELS, *Anti-Dühring,* ed. Ayuso, Madrid, 1975, pp. 297-298.
[65] Consultar O. Lange: *Economía Política,* t. I, ed. cit., pp. 161-162.

bajo y a la cooperación que existen entre las empresas de producción el mismo carácter consciente y encaminado a una meta predeterminada, el cual es el apropiado para la cooperación y la división del trabajo que existen dentro de cada establecimiento.

VIII

La división social del trabajo llevada a cabo en los diferentes escalones conduce a la especialización de las personas para que éstas efectúen determinados trabajos; es decir, lleva a la especialización de los diversos tipos de trabajos concretos. Los diferentes tipos de trabajos concretos son ejecutados por determinados grupos de personas; estos trabajos se llaman oficios o profesiones, como agricultores, zapateros, tejedores, obreros metalúrgicos, ingenieros de todas las especialidades, contadores, directores de fábrica, etc. La división del trabajo enfocada de esa manera se denomina *división profesional del trabajo* [66].

[66] La división del trabajo más antigua que se encuentra en la historia de las sociedades humanas aún no tiene carácter de división profesional del trabajo. Aquélla era la llamada *división natural del trabajo,* que se establece entre la mujer y el hombre, y, en parte, también entre las personas de diferentes edades. Las mujeres empiezan a desempeñar los trabajos agrícolas y de jardinería (el llamado «kopieniactwo», la forma más rudimentaria de trabajar la tierra); los hombres, en cambio, se dedican a la caza o a la pesca (ver L. KRZYWICKI, *Ustroje spoleczno-gospodarcze w okresie dzikosci i barbarzynstwa* [Formaciones socioeconómicas en el período de salvajismo y barbarie], Varsovia, 1914, pp. 147-169). Sobre esa base en cada una de las sociedades se establece una determinada división de las ocupaciones «masculinas y femeninas», la cual frecuentemente perdura a través de milenios. M. J. HERSKOVITS (*Economic antropology,* Nueva York, 1952, pp.127-142) demuestra que las ocupaciones «masculinas y femeninas» en diferentes sociedades son distintas, siendo, no obstante, siempre bien definidas y consagradas por las costumbres y tradiciones. Ver también R. THURNWALD, *Werden, Wandel und Formen der Wirtschaft, Die menschliche Gesellschaft in ihren ethnosoziologischen Grundlagen,* Berlin, Lipsk, 1932, t.3, pp. 7-8. Engels estudia el desarrollo profesional del trabajo y diferencia tres etapas. *La primera gran división social del trabajo* consiste en la separación de las tribus pastoras, la cual se lleva a cabo en la época del comunismo primitivo. Esto conduce a un trueque regular de los productos de ganadería por otros objetos, sobre todo por los productos agrícolas. En tal caso el ganado frecuentemente juega el papel de dinero. *La segunda gran división del trabajo* está vinculada a los comienzos de la producción y el empleo del hierro. Sobreviene entonces la separación de la artesanía (o sea, la producción industrial) de la agricultura. La fabricación de las herramientas y de las armas de hierro, la elaboración de otros metales (la plata, el oro), así como también, parcialmente la hilandería, llegan a formar profesiones independientes. En relación a esto surgen ciudades, se opera la separación de la ciudad del campo. Finalmente, la *tercera gran división del trabajo* reside en la independización del comercio. Surge la profesión de mercader que juega un papel de intermediario en el trueque de los productos elaborados por las diferentes profesiones. Particularmente, el mercader

La separación de las distintas profesiones ocasiona una diversificación de los tipos concretos de trabajo. El trabajo efectuado por los diferentes miembros de la sociedad deja de ser un conjunto de funciones similares, deja de ser un trabajo homogéneo. Los trabajos efectuados por las diferentes profesiones se convierten en trabajos que no son comparables directamente entre sí; se diferencia uno del otro en cuanto a la pericia, destreza y eficacia necesarias, así como también, en lo que respecta al esfuerzo físico e intelectual ligado a éstas. Lo expresamos diciendo que estos trabajos requieren *cualificaciones* adecuadas. Las cualificaciones necesarias para efectuar un trabajo dentro de una profesión determinada se adquieren por medio del aprendizaje, así como también mediante la habilidad que se adquiere en la práctica al llevar a cabo este trabajo. No todos los trabajos, sin embargo, requieren aprendizaje y adquisición de cualificaciones; existen labores tan sencillas (por ejemplo: cavar zanjas, transportar cargas, vigilar el funcionamiento de las máquinas simples) que cualquier persona normal y sana puede ejecutarlas sin preparación alguna. Estas funciones se denominan *trabajo simple* o bien *trabajo no cualificado*. El trabajo humano es, como dice C. Marx [67], «el empleo de esa *simple* fuerza de trabajo que todo hombre común y corriente, por término medio, posee en su organismo corpóreo, sin necesidad de una especial educación. El *simple trabajo medio* cambia, indudablemente, de carácter según los países y la cultura de cada época, pero existe siempre dentro de una sociedad dada». El trabajo cualificado o calificado, para diferenciarlo del trabajo simple, se suele llamar frecuentemente *trabajo complejo* [68]. Los trabajos relacionados con la ejecución de las distintas profesiones siempre son calificados o cualificados y, por lo tanto, tienen carácter de trabajos complejos. El trabajo simple puede ser efectuado por cada hombre normal apto para trabajar y no es un trabajo propio de profesión alguna, y también puede ser

es intermediario entre la artesanía y la agricultura, entre la ciudad y la aldea, así como también entre las diferentes ciudades. Aparece también el dinero metálico. La profesión de mercader constituye la primera gran profesión que no está ocupada en la producción. Ver F. ENGELS: *El origen de la familia, la propiedad privada y el Estado.* Ed. Ayuso, Madrid, 1972, pp. 160-172.

[67] C. MARX, *El Capital,* ed. cit., t. I, p. 11.

[68] *Idem,* p.11. En la ed. alemana leemos: «Kompliziertere Arbeit», es decir, un trabajo un poco más complejo, y posteriormente aparece la expresión: «Kompliziertere Arbeit», o sea, el trabajo más complejo. Marx, por lo tanto, no se refiere a un sólo trabajo complejo, como podría deducirse de la traducción polaca, sino que habla de los diferentes grados de complejidad de éste, que corresponden a las más o menos altas cualificaciones que son necesarias en una profesión dada.

ejecutado por personas que, como decimos, «no tienen profesión alguna».

IX

La separación del trabajo de dirección forma parte de la división profesional del trabajo. Como ya hemos visto, éste es el resultado de la necesidad de coordinación entre las distintas funciones que existen dentro de una empresa de producción y como tal es indispensable dentro de cualquier modo social de producción [69]. Esta separación tiene, sin embargo, también otro valor, aunque ligado a la propiedad de los medios de producción; es decir, el carácter específico de un modo de producción histórico determinado. En los modos de producción antagónicos el trabajo de dirección no sólo sirve a la necesidad social de coordinar las funciones en el proceso productivo, sino también supedita ese proceso a los intereses de los propietarios de los medios de producción. El trabajo de dirección se convierte en un instrumento de explotación de los trabajadores por los propietarios de los medios de producción. Marx lo describe con las siguientes palabras: «este trabajo de alta vigilancia se presenta necesariamente en todos aquellos sistemas de producción basados en el antagonismo entre el obrero como productor directo y el propietario de los medios de producción. Cuanto mayor es este antagonismo, mayor es también la importancia que desempeña el trabajo de alta vigilancia. Por eso este trabajo alcanza su punto culminante bajo el sistema de la esclavitud. Sin embargo, es también indispensable en el régimen de producción capitalista, puesto que aquí el proceso de producción constituye, al mismo tiempo, el proceso de consumo de la fuerza de trabajo por el capitalista» [70].

El doble carácter que tiene el trabajo de dirección en los modos

[69] F. ENGELS lo subraya de una manera muy particular cuando descubre la necesidad de coordinar todas las funciones en una fábrica de algodón o en los ferrocarriles. Escribiendo sobre los ferrocarriles dice: «Es absolutamente necesaria la cooperación de una infinidad de individuos, cooperación que debe tener lugar a horas muy precisas, para que no se produzcan desastres. También aquí la primera condición para que la empresa marche es una voluntad dominante que zanje todas las cuestiones secundarias. Esta voluntad puede estar representada por un solo delegado o por un comité encargado de ejecutar los acuerdos de una mayoría de interesados. Tanto en uno como en otro caso existe autoridad bien pronunciada.» (F. ENGELS, «De la autoridad».) C. MARX y F. ENGELS, *Obras escogidas*, p. 670.

[70] C. MARX, *El Capital*, t. III, parte 1, p. 367.

de producción antagónicos proviene de que el propietario de los medios de producción, o bien el agente de éste (el dueño o el señor, el *villicus* como se le llamaba en la unidad económica esclavista ancestral, o mayordomo en la hacienda feudal, o bien el director-manager en la fábrica capitalista) es al mismo tiempo coordinador del proceso productivo. Cumple él una doble misión: la de coordinador, socialmente imprescindible de las funciones necesarias en el proceso productivo, así como también la de organizador de la explotación de los trabajadores, pero desempeña el papel de coordinador en el proceso productivo porque él mismo es propietario de los medios de producción o es un agente de éste; la propiedad de los medios de producción constituye aquí el hecho primario, y el papel de coordinador en el proceso productivo es un efecto de este hecho [71].

Esto está vinculado con la existencia de dos tipos de relaciones de producción, así como también con su dependencia recíproca. Las relaciones de producción son relaciones sociales entre los hombres, que se forman durante el proceso productivo. Estas surgen como resultado del hecho de que el proceso productivo es un proceso social, en el cual los hombres cooperan y trabajan unos para otros. En dicha formación social existe la cooperación (simple, así como también la división del trabajo), hay también diversas formas de propiedad de los medios de producción. De ahí derivan dos tipos de relaciones de producción. El primero está constituido por las relaciones de producción que surgen cuando existe la cooperación en el proceso del trabajo; las denominaremos *relaciones de cooperación*. Al segundo tipo pertenecen las relaciones de producción que se forman sobre la base de apropiación de los medios de producción que existen en una sociedad dada; a éstas las llamaremos *relaciones de propiedad*. Las relaciones de cooperación provienen directamente de la producción simple y de la división del trabajo. Estas perduran mientras existe el modo de cooperación simple y la división del trabajo correspondientes, y se vinculan con la técnica aplicada en el proceso de producción. Lo ilustra bien el ejemplo citado por Krzywicki referente a las relaciones de trabajo que existen en los ferrocarriles: «A la hora fijada alguien debe encon-

[71] C. MARX, *El Capital*, t.1,p.268: «El capitalista no es tal capitalista por ser director industrial, sino al revés: es director industrial por ser capitalista. El alto mando sobre la industria se convierte en atributo del capital, como en la época feudal eran atributo de la propiedad territorial el alto mando en la guerra y el poder judicial».

trarse al frente de la caja; alguien tiene que pesar los paquetes o vigilar en qué lugar se encuentran los trenes que circulan, y otros tienen que realizar las funciones de maquinista, revisor y telegrafista. Las actividades realizadas por un individuo están estrecha y perfectamente coordinadas con las obligaciones de los demás; cada persona representa, en cierta manera, el complemento vivo de tal o cual parte de un objeto inanimado: el tren, la caja, el depósito. Pero este grupo de hombres, lo mismo que toda la línea del ferrocarril, constituye un solo conjunto: es imposible comprender las actividades de estos hombres si no tenemos en cuenta el horario de los trenes, su equipo técnico y el torrente de mercancías transportadas» [72].

Las relaciones de cooperación descritas aquí en gran medida son independientes de las relaciones de propiedad, del hecho de que el ferrocarril sea propiedad privada o social y a qué tipo de propiedad social pertenezca. Sin embargo, ellas excluyen ciertos tipos de propiedad privada, por ejemplo, la pequeña propiedad de los particulares que trabajan en el transporte ferroviario, ya que este tipo de propiedad haría imposible la cooperación y la división del trabajo necesarios para las condiciones técnicas del trabajo ferroviario. Por otra parte, el hecho de que el ferrocarril sea de una propiedad privada capitalista, o propiedad colectiva socialista, ejerce una influencia en el monto de los salarios de los trabajadores, en la forma y en el modo de los pagos percibidos por el trabajo, en la relación que existe entre el personal dirigente y el personal operante, sobre la existencia de autonomía de los trabajadores y los derechos de éstos, las condiciones de admisión y despido del trabajo, etc. Puede también ejercer su influencia sobre la técnica aplicada en la producción, por ejemplo, sobre el grado de mecanización de diversas funciones, así como también puede de esa manera influir en la conformación de las relaciones de cooperación.

Las relaciones de cooperación y las relaciones de propiedad ejercen entre sí una influencia recíproca, están en dependencia mutua. Las condiciones técnicas de producción, el estado de las fuerzas productivas definen las relaciones de cooperación y éstas, a su vez, determinan la esfera de las relaciones de propiedad que esté de acuerdo con la existencia de las mismas. Las relaciones de pro-

[72] L. KRZYWICKI, *Rozwój społeczny wśród zwierząt i u rodzaju ludzkiego* (Desarrollo social entre los animales y en la especie humana). Estudios sociológicos. Varsovia, 1951, pp. 201-202. Ver también O. LANGE, *Economía política*, t. I, ed. cit., pp. 45-47.

piedad ejercen su influencia sobre las relaciones de cooperación, ya sea directamente, al determinar qué relaciones de cooperación son posibles en el marco de las relaciones de propiedad dadas, ya sea indirectamente, mediante la influencia ejercida sobre la técnica aplicada en el proceso productivo. La palanca principal de la influencia directa que ejercen las relaciones de propiedad sobre las relaciones de cooperación la constituye el hecho de que las primeras definen quién es el coordinador de las respectivas funciones efectuadas en el proceso productivo, es decir, quién desempeña el papel dirigente en este proceso y en interés de quién lo hace.

X

La producción de un objeto dado requiere un determinado tiempo. Las respectivas funciones, o sea, los trabajos concretos de los que se compone el proceso productivo, exigen un lapso de tiempo más largo o más breve. Además, en el proceso productivo no todas las funciones son efectuadas simultáneamente. Una parte de ellas está distribuida en el tiempo, las funciones se suceden unas a otras, y lo que es más, el haber concluido las funciones anteriores, es frecuentemente condición necesaria para llevar a cabo con éxito las funciones ulteriores. La secuencia consecutiva de las funciones es establecida por la técnica de transformación del objeto del trabajo con ayuda de los medios de trabajo dados. Así, por ejemplo, la consecutividad de funciones efectuadas al labrar la tierra está definida por la técnica del cultivo de la planta respectiva. La secuencia de las funciones llevadas a cabo durante la fabricación del queso es dictaminada por la técnica de esta fabricación. La secuencia de las funciones efectuadas en la fabricación de focos eléctricos es establecida por el tipo de maquinaria utilizada, el tipo de servicio, así como también por las acciones ejecutadas por esta maquinaria. La coordinación de las funciones respectivas dentro de la producción abarca, por lo tanto, también coordinación de éstas en el tiempo.

El tiempo necesario para efectuar todas las funciones, es decir, los trabajos necesarios para la producción de un objeto determinado, se llama *período de trabajo* [73] de una producción dada. El pe-

[73] MARX, *El Capital*, ed. cit., t. II, p. 205: «En cambio, cuando hablamos del período de trabajo, aludimos al número de jornadas de trabajo coherentes que una determinada rama industrial exige para suministrar un producto elaborado.»

ríodo de trabajo es distinto para la producción de diferentes objetos. «Una de estas industrias —dice Marx— suministra diaria o semanalmente una determinada cantidad de producto elaborado, de hilado de algodón; la otra, en cambio, tiene que repetir el proceso de trabajo durante tres meses, supongamos, para poder elaborar un producto terminado, una locomotora... Estas diferencias en cuanto a la duración del acto de producción no se dan solamente entre ramas de producción distintas, sino también dentro de la misma rama de producción, a tono con el volumen del producto que se trata de suministrar. Una casa vivienda corriente se construye, evidentemente, en menos tiempo que una gran fábrica y requiere, por tanto, un número menor de procesos de trabajo continuos» [74].

El período de trabajo no abarca, empero, todo el tiempo que es necesario para la elaboración de un producto. Como sabemos, la producción se sirve de la acción indirecta, pone en movimiento la cadena de causas y efectos que sustituye la intervención directa del hombre en el objeto de trabajo, aplica sistemas de acciones acopladas, tales como los diversos tipos de procesos biológicos y químicos, así como también el mecanismo de las máquinas. Estos sistemas de acciones acopladas requieren también cierto tiempo para obtener el resultado que el hombre se había propuesto alcanzar, aunque éstas no siempre necesitan del servicio del hombre, o sea, del trabajo de éste, durante todo ese tiempo. Marx presenta una serie de ejemplos. «Así, por ejemplo, el vino, al salir del lagar, tiene que pasar por un período de fermentación y luego reposar durante algún tiempo, para lograr un cierto grado de perfección. «En muchas ramas industriales, como en la cerámica, el producto necesita someterse a un proceso de secado, o someterse a la acción de ciertos factores que modifican su composición química, como ocurre en el ramo de la tintorería. El trigo de invierno necesita unos nueve meses para madurar. El proceso de trabajo que media entre la siembra y la recolección es un proceso casi ininterrumpido. En cambio, en la arboricultura, una vez que terminan la siembra y los trabajos preliminares necesarios, tienen que pasar a veces cien años antes de que la simiente se convierta en producto terminado» [75]. La elaboración de un objeto determinado, fabricado en una máquina que funciona automáticamente, que requiere que transcurra un cierto tiempo después de que el obrero haya dispuesto la materia

[74] Idem, p. 203.
[75] Idem, p. 212.

prima, sería otro ejemplo a añadir a los anteriores. A todo el tiempo necesario para la elaboración de un objeto determinado lo denominamos *tiempo de producción* o *período de producción* [76]. Es evidente que el período de producción —como regla— es más largo que el período de trabajo: en ningún caso puede el primero ser más breve que el segundo.

Los medios de producción —tanto los objetos de trabajo como los medios de trabajo— se desgastan durante el proceso de producción. Algunos de éstos se desgastan completamente en el curso de un solo período de producción. Lo mismo sucede con los objetos de trabajo. Los objetos de trabajo son transformados totalmente en producto. Usando el lenguaje tecnológico, los objetos de trabajo constituyen el material bruto del cual surge el producto. También lo podemos expresar diciendo que los objetos de trabajo «entran totalmente a formar parte del producto»: después de haber concluido el proceso de producción, éstos han dejado de existir en su forma primaria natural, han sido totalmente desgastados. También algunos medios de trabajo se deprecian totalmente en el curso de un solo proceso de producción, porque su empleo consiste en el consumo total de éstos; por ejemplo, el carbón, el petróleo o la corriente eléctrica para el motor, las grasas y los aceites para la maquinaria, la corriente eléctrica para alumbrar los recintos fabriles, etc. Estos medios de trabajo no constituyen el material bruto del cual surge el producto, sino que son desgastados, consumidos completamente en el curso del período de producción [77]. Los medios

[76] En la práctica de la planificación y administración económica se emplea ahora generalmente la expresión *ciclo de producción* para designar el período de producción. El período de producción, o sea, el ciclo de producción del que hablamos aquí, se refiere a un proceso de producción en un establecimiento de producción respectivo. No debe confundirse a éste con el llamado período de producción en la teoría de Eugenio Böhm-Bawerk, el destacado representante de la escuela austríaca de economía política. Según Böhm-Bawerk, el período de producción no se refiere a un establecimiento de producción respectivo, sino a toda la economía social. La producción la considera Böhm-Bawerk como un proceso que se opera en estadios sucesivos —empezando por extraer la materia prima de la tierra, fabricar los diversos productos semiprocesados, elaborar instrumentos y dispositivos necesarios para la transformación de los objetos de trabajo en diferentes estadios de este proceso— hasta obtener los bienes de consumo acabados. En cada uno de los estadios de este proceso se efectúa cierto tipo de trabajo. Al tiempo medio que transcurre desde que se lleva a cabo esta inversión de trabajo en cada uno de los estadios hasta el momento en el que aparecen los bienes de consumó acabados Böhm-Bawerk lo denomina período de producción.

[77] «Una parte de los medios de producción —la formada por las materias auxiliares consumidas por los medios de trabajo durante su funcionamiento, como el carbón que consume la máquina de vapor, o que se limitan a apoyar el proceso de

de producción que son consumidos totalmente en un solo proceso productivo son denominados *medios de circulación.*

Por lo general, sin embargo, los medios de trabajo se distinguen por una durabilidad mayor. Conservan su forma natural, y por lo tanto, son aptos para utilizarse durante un tiempo más prolongado: éstos pueden ser empleados en más de un solo proceso productivo. Los medios de producción de este tipo los denominamos *medios durables.* Es evidente que la durabilidad de éstos es limitada; todos los medios de trabajo —los instrumentos y las máquinas, así como también todo tipo de instalaciones auxiliares— se desgastan paulatinamente hasta que finalmente dejan de ser aptos para su utilización y tienen que ser reemplazados por otros nuevos. Varias causas se unen para motivar este hecho. Los medios de trabajo se desgastan en el curso de su utilización, y la rapidez con que esto sucede depende de la frecuencia y la intensidad del uso que se les da. Por ejemplo, las máquinas mantenidas en movimiento por más de dieciséis de las veinticuatro horas se desgastan más rápidamente que las que están en movimiento durante ocho de cada veinticuatro horas: un motor de combustión o una máquina de vapor se desgastan con rapidez mayor mientras mayor es la carga que llevan; los rieles de ferrocarril se desgastan más rápidamente en las vías férreas donde los trenes pasan con mayor frecuencia y el peso de éstos es más grande (de una manera particularmente rápida los rieles se desgastan en las estaciones ferroviarias).

Los medios de producción se deprecian gradualmente aun cuando no están siendo utilizados en la producción. Los edificios y las diversas instalaciones están expuestas a la acción del aire, la lluvia y el viento; el material del cual éstos están hechos se deteriora con el paso del tiempo; el hierro y el acero del que están fabricadas las máquinas se oxida, o bien de otra manera pierde su utilidad. Finalmente, como resultado del progreso técnico aparecen medios de trabajo mejores, especialmente la maquinaria y los dispositivos que son más útiles que los antiguos. Decimos entonces que sobreviene el llamado *desgaste moral,* es decir, *atraso económico* de los medios de trabajo [78], en contraste al *desgaste físico* del que

producción, como el gas de alumbrado, etc.— no entran a formar parte materialmente del producto... Pero, a diferencia de éstos, son consumidos íntegramente en cada proceso de trabajo en que entran, debiendo reponerse, por tanto, totalmente y mediante nuevos ejemplares de la misma clase en cada nuevo proceso de trabajo.» C. MARX, *El Capital,* t. II, pp. 161-162 (de la edición polaca).

[78] El término «desgaste-moral» es usado por Marx con la observación de que la expresión «moral» no está aquí en su lugar de una manera absoluta, sino que se

hemos hablado anteriormente. Algunas veces, los medios de trabajo dejan de ser aptos para su utilización a causa de un accidente (por ejemplo, destrucción de una fábrica por incendio, destrucción de los edificios por una inundación, hundimiento de un barco, pérdida del equipo ferroviario a consecuencia de una catástrofe).

Vale la pena señalar que el hecho de que un medio de producción dado sea un capital circulante o un capital fijo depende del modo de su utilización en el proceso de producción, así como también del hecho de que éste sea usado durante un sólo período de producción o en un número mayor de tales períodos. En cambio, este hecho no depende del carácter físico del medio de producción. «Un buey, considerado como ganado de labor, es capital fijo. Si se le mata para comerlo, ya no actúa como medio de trabajo y deja de ser, por tanto, capital fijo» [79]. En el primer caso, el período anual del cultivo de plantas constituye un período productivo, y el buey es utilizado durante un número mayor de estos procesos, y en el segundo caso, el período productivo es el período de engorde de éste hasta el momento de llevarlo al matadero, así que el buey es utilizado como un objeto de trabajo durante un solo período de este tipo.

El lapso de tiempo durante el cual el medio de producción es utilizado en el proceso productivo se llama *período de utilización*. Este se puede expresar numéricamente de dos maneras: aceptando como unidad de tiempo el período productivo, o bien tomando como unidad un cierto período de tiempo del calendario, como, por ejemplo, un mes o un año. Si medimos el período de utilización de éste en los períodos productivos como unidades, entonces el período de utilización de los medios de circulación siempre será igual a uno, en cambio el período de utilización de los medios durables constituirá una recurrencia del período productivo. No obs-

utiliza en sentido figurado para señalar la distinción con término «desgaste físico». «Pero, además del desgaste material —dice Marx— toda máquina se halla sujeta a lo que podemos llamar *desgaste moral*» (C. MARX, *El Capital*, t. I, p. 332). S. STRUMILIN (*Szkice o gospodarce Z.S.R.R.* [Esquemas de la economía de la URSS], traducción del ruso, Varsovia, 1961, pp. 71-72) comenta este término de la siguiente manera: «No está fundamentado usar el término 'desgaste moral'. Solamente en una sociedad en la que la ley categórica era —como dice Shchedrin— 'preocúpate de tu propio bolsillo', no existía diferencia alguna entre el concepto de pérdidas económicas y los daños morales. En las condiciones soviéticas sería más correcto contraponerle al concepto 'desgaste físico' el término 'atraso económico', y suprimir la expresión 'desgaste moral' como uno de tantos vestigios del capitalismo en la conciencia humana».

[79] Ver C. MARX, *El Capital*, ed. cit., t. II, p. 142.

tante, este tipo de medición hace imposible la comparación directa entre los períodos de utilización de los medios de producción en los diferentes sectores y ramas de producción. Por esta razón, generalmente el período de utilización se mide en unidades de tiempo del calendario.

Puesto que los medios de producción se van desgastando con el tiempo y, como hemos observado, el desgaste de éstos es resultado de su utilización en el proceso productivo, o bien (lo que es más frecuente) aquél se debe a otras causas, que asimismo ocasionan la pérdida de utilidad de los medios de producción. La rapidez con que se van desgastando los medios de producción se mide según el *nivel de desgaste* de éstos. El nivel de desgaste constituye el inverso del período de utilización del medio de producción. De manera similar al período productivo, el grado de desgaste se puede medir mediante una unidad de tiempo que corresponde al período productivo, o bien con una unidad de tiempo del calendario. Por ejemplo, si el período productivo dura tres meses, y la máquina instalada se utiliza en el proceso productivo dado durante diez años, los medios de circulación que se desgastan en el curso de un solo lapso productivo tienen el período de utilización igual a 40 períodos productivos, y el grado de desgaste de ésta constituye 1/40 parte del lapso de un período productivo. Sin embargo, cuando calculamos el nivel de desgaste tomando las unidades de tiempo del calendario, el período de utilización de los medios de circulación constituye 1/4 parte de un año, y su nivel de utilización anual es igual a 4, o sea, en el transcurso de un año es necesario renovar cuatro veces los medios de circulación; mientras tanto, el período de utilización de una máquina es igual a diez años y el nivel de desgaste de ésta es 1/10 por año, es decir, después de diez años es necesario reemplazarla con una nueva máquina.

XI

El proceso de producción no termina al transcurrir un solo período productivo, sino que se repite constantemente, ya que cada vez de nuevo vuelven a ser imprescindibles los bienes materiales indispensables para satisfacer las necesidades humanas en la sociedad. «Cualquiera que sea la forma social del proceso de producción —dice Marx— éste tiene que ser necesariamente un proceso continuo o recorrer periódica y repetidamente las mismas fases. Nin-

guna sociedad puede dejar de consumir, ni puede tampoco, por tanto, dejar de producir. Por consiguiente, todo proceso social de producción considerado en sus constantes vínculos y en el flujo ininterrumpido de su renovación es, al mismo tiempo, un *proceso de reproducción*» [80]. La reproducción es una repetición constante del proceso productivo; al igual que la producción, constituye un proceso social, de ahí que hablemos de proceso *social* de reproducción.

Como sabemos, los medios de producción se gastan en el proceso productivo y, por lo tanto, en el proceso productivo se presenta la necesidad de *renovación* de los medios de producción gastados, porque, de otra manera, el proceso productivo no podría continuar. Esta renovación consiste en la elaboración de medios de producción con el fin de reemplazar los medios gastados. Esto significa que cierta cantidad de productos debe tener la forma efectiva de medios de producción gastados, por el hecho de que solamente en esta forma puede servir para reemplazarlos. Marx lo expresa de la siguiente manera: «Las condiciones de la producción son, a la par, las de la reproducción. Ninguna sociedad puede producir constantemente, es decir, reproducir, sin volver a convertir constantemente una parte de sus productos en medios de producción o elementos de la nueva producción. Suponiendo que las demás circunstancias no varíen, las sociedades sólo pueden reproducir o conservar su riqueza en la misma escala reponiendo *in natura* los medios de producción consumidos, por ejemplo, durante un año, o sea, los instrumentos de trabajo, materias primas y materias auxiliares mediante una cantidad igual de nuevos ejemplares, separados de la masa anual de productos e incorporados de nuevo al proceso de producción» [81].

La utilización de los medios de producción renovados requiere que se repitan las diversas funciones, o sea, que vuelvan a efectuarse los trabajos concretos que constituyen un proceso productivo dado. El proceso de reproducción es la repetición constante de los procesos de trabajo determinados. Para que esto sea posible, hay que mantener entre los miembros de la sociedad la capacidad de llevar a cabo estos trabajos. Por esta razón es necesario conservar a las personas que efectúan determinados trabajos y tiene que ser mantenida la capacidad de éstas para llevarlos a cabo. Ade-

[80] C. MARX, *El Capital*, ed. cit., t. I, p. 476.
[81] Idem, p. 476.

más, las personas que pierden su capacidad y la eficacia para efectuar los respectivos trabajos concretos a causa de alguna enfermedad o la edad avanzada, así como también a consecuencia de la muerte, deben ser sustituidos por nuevos hombres que hayan adquirido esta capacidad y eficiencia. La capacidad y la eficacia para efectuar un determinado tipo de trabajo la denominamos *fuerza de trabajo* [82]. Junto a la renovación de los medios de producción gastados existe por lo tanto en la sociedad una constante renovación de la fuerza de trabajo.

La renovación de la fuerza de trabajo se compone de dos procesos. En primer lugar, la fuerza de trabajo de los elementos humanos existentes tiene que ser mantenida constantemente. Esta fuerza se agota en el proceso de trabajo y siempre tiene que ser renovada mediante la alimentación, el descanso, las diversiones adecuadas, acondicionamiento de las viviendas, procedimientos indispensables para conservar la capacidad necesaria para efectuar el trabajo (es decir, las cualificaciones profesionales). Esta es la renovación de la fuerza de trabajo de los elementos humanos existentes. Esto requiere satisfacer una serie de necesidades —tanto de orden biológico como sociocultural— de los miembros que laboran en la sociedad. Como consecuencia de la falta de satisfacción de éstas o su satisfacción deficiente, disminuyen la capacidad y la eficacia necesarias para efectuar el trabajo, o sea, disminuye la fuerza de trabajo.

La mano de obra de los elementos humanos existentes no puede, sin embargo, ser mantenida, es decir, renovada, por un tiempo indefinido. Esto es imposible debido al proceso biológico natural de envejecimiento y muerte de los individuos humanos. Este proceso hace que después de un cierto período de tiempo la fuerza de trabajo del individuo disminuya y finalmente cese a causa de la vejez o la muerte. Finalmente, cada uno de los elementos humanos se retira de la participación en el proceso social del trabajo. En segundo lugar, por lo tanto, la renovación de la fuerza de trabajo en la sociedad exige que los individuos que se retiran de la participación en el proceso social de trabajo sean reemplazados por

[82] El término «fuerza de trabajo» fue introducido por Marx cuando éste llevó a cabo la diferenciación entre la fuerza de trabajo y el trabajo hecho. El concepto de fuerza de trabajo lo define Marx de la siguiente manera: «Entendemos por *capacidad* o *fuerza de trabajo* el conjunto de las condiciones físicas y espirituales que se dan en la corporeidad, en la personalidad viviente de un hombre y que éste pone en acción al producir valores de uso de cualquier clase» (C. MARX, *El Capital*, ed. cit., t. I, p. 121).

nuevos elementos que posean una suficiente eficacia para efectuar trabajos de diferentes tipos. Esta es la renovación de las generaciones de los elementos humanos que trabajan en la sociedad. Este tipo de renovación de las generaciones requiere ante todo que se realice un adecuado proceso biológico de nacimiento de los seres humanos que podrían sustituir en el futuro a las personas de las generaciones anteriores en el proceso del trabajo; ésta es la llamada *reproducción de la población* [83]. No obstante, esto es insuficiente. Los individuos nacidos durante un cierto período de tiempo tienen que ser alimentados, mantenidos y cuidados, educados y enseñados para adquirir la capacidad y destreza en la ejecución de los respectivos trabajos concretos en el proceso productivo (es decir, para obtener las cualificaciones profesionales). Todo eso constituye una parte del proceso de renovación de las generaciones de la población que labora en la sociedad. Como resultado, la renovación de las generaciones también requiere satisfacer una serie de necesidades biológicas y socioculturales, tanto de la generación nueva como de las personas mayores que se dedican a mantener y cuidar, a educar, enseñar y formar a la nueva generación.

La renovación de la fuerza de trabajo en la sociedad abarca, por la misma razón, tanto la renovación de la fuerza de trabajo de los individuos humanos existentes como también la renovación de las generaciones de los trabajadores [84]. Con ambos procesos, que renuevan conjuntamente la fuerza de trabajo en la sociedad, se vincula el menester de satisfacer las necesidades biológicas y socioculturales. Esto requiere una producción de los respectivos bienes que sirven para satisfacer estas necesidades. Dichos bienes constituyen bienes de consumo (a los que pertenecen también los medios de prestar servicios, los medios necesarios para curar, los medios de enseñanza y estudios,

[83] La llamada reproducción de la población se determina de la manera siguiente: «La reproducción de la población consiste en la renovación continua de las generaciones que se van, por otras nuevas.» A. BOYARSKI y PL. SHUSHERIN, *Demograficheskaya statistica* [La estadística demográfica], Moscú, 1955, p. 90.

[84] Marx lo presenta de la siguiente manera: «La fuerza de trabajo de un hombre existe, pura y exclusivamente, en su individualidad viva. Para poder desarrollarse y sostenerse, un hombre tiene que consumir una determinada cantidad de productos de primera necesidad. Pero el hombre, al igual que la máquina, se desgasta y tiene que ser reemplazado por otro. Además de la cantidad de artículos de primera necesidad requeridos para su *propio* sustento, el hombre necesita otra cantidad para criar determinado número de hijos, llamados a reemplazarle a él en el mercado de trabajo y a perpetuar la raza obrera.» C. MARX, *Salario, precio y ganancia*. Ricardo Aguilera, editor, Madrid, 1970, pp. 52-53. De manera similar lo concibe ENGELS en «El capital de Marx», *Obras escogidas*, ed. cit., p. 486.

los objetos que sirven para la diversión, etc.) [85]. Una cierta cantidad de los productos tiene, por lo tanto, que tener una forma efectiva de bienes de consumo indispensables para la renovación de la fuerza de trabajo en la sociedad. Denominemos estos bienes de consumo *medios de vida necesarios para mantener la fuerza de trabajo* [86].

XII

Como consecuencia, resulta que el proceso de reproducción requiere una elaboración constante de cierta cantidad de productos que tienen la forma efectiva de medios de producción destinados a la renovación de los medios de producción desgastados, así como también una constante fabricación de cierta cantidad de productos que tienen forma de medios necesarios para mantener la fuerza de trabajo en la sociedad. En un cierto escalón del desarrollo de las fuerzas productivas superior al estado muy primitivo de éstas, la cantidad de productos elaborados en el proceso productivo social es no obstante mayor que la cantidad necesaria para la renovación de los medios de producción y de la fuerza de trabajo [87]. Aquella cantidad suplementaria de los productos constituye la llamada producción adicional, o sea, un producto excedente que sobrepasa la producción necesaria para la renovación del proceso productivo. El conjunto de productos que constituyen un exce-

[85] En cuestión de los medios de prestar servicios, ver O. LANGE, *Economía política*, ed. castellana citada, t. I, p. 16.

[86] Este término es de MARX, *El Capital*, t. I, p. 124. Hay que recordar, sin embargo, que estos medios son indispensables no sólo para conservar la vida en el sentido biológico, sino también para conservar aquellas condiciones socioculturales de vida que son necesarias para mantener la fuerza de trabajo dentro de la sociedad.

[87] En opinión de ENGELS, este tipo de excedente empieza a aparecer en el estadio medio de barbarie (conforme la clasificación de los estadios del desarrollo de la sociedad de L. H. Morgan), es decir, después de la introducción de la ganadería, el procesamiento de metales, hilandería y la labranza de la tierra. Ver F. ENGELS, *Origen de la familia, propiedad privada y el Estado*, ed. cit. Lo confirma Ludwik KRZYWICKI, *Rozwój stosunków gospodarczych, Swiat i czlowiek* (Desarrollo de las relaciones económicas, Mundo y Hombre), cuaderno III, Varsovia, 1912, p. 294. Melville J. Herskovits cita ejemplos de tribus contemporáneas que aún no elaboran el plusproducto que exceda lo indispensable para la renovación de los medios de producción y la fuerza de trabajo. A éstos pertenecen los bosquimanos y los hotentotes en Africa, los esquimales, algunas tribus indias en Bolivia y en el altiplano de Chaco. El resto de los llamados pueblos primitivos conocidos por los etnólogos elaboran un excedente de productos. Ver HERSKOVITS, *Economic Anthropology*, ed. cit., capítulo XVIII.

dente lo llamamos *producto adicional* o plusproducto del proceso social de producción [88].

Los productos respectivos que integran el producto excedente pueden tener diversas formas materiales y diferente asignación. Si todos los productos tienen una forma material que sólo se presta para que éstos puedan constituir únicamente medios de consumo, esto significa que los medios de producción fabricados alcanzan exactamente para cubrir la renovación de los medios de producción desgastados en el proceso de producción. Decimos, entonces, que tiene lugar la *reproducción simple* [89]. Si, en cambio, una parte de los productos que integran el producto excedente tiene forma material de medios de producción, aumentan las reservas de los medios de producción que se utilizan en el proceso productivo. Decimos entonces que se efectúa la llamada *reproducción en escala ampliada* [90].

Cuando la reproducción se efectúa en forma ampliada, la suma total de los medios de producción va en aumento; como regla, esto conduce a un incremento de la cantidad de productos elaborados en el proceso productivo. El aumento de la suma total de los medios de producción requiere generalmente que aumente la cantidad de trabajos concretos efectuados, o sea, las diversas funciones necesarias para utilizar los medios de producción adicionales. Esto requiere un incremento de la mano de obra que existe en la sociedad. Como resultado, la parte adicional de los medios de consumo adquiere un carácter de medios indispensables para el manteni-

[88] El término «producto excedente» usado en ese sentido fue introducido por Marx. Ver C. MARX, *El Capital*, t. I, p. 175. Ya antes, los fisiócratas empleaban un término semejante *(produit net)*, también lo utilizaban los economistas de la escuela clásica *(surplus produce)* en una manera que intentaba expresar el mismo estado de cosas que Marx define y denomina producto excedente. La definición de producto excedente en el concepto de éstos no era, sin embargo, exacta. Una definición precisa fue dada por Marx posteriormente en base a la distinción llevada a cabo por éste entre el concepto de trabajo y el concepto de fuerza de trabajo. La historia de las concepciones anteriores del término «producto excedente» la contiene, entre otros, el trabajo de MARX, *Teoria wartości dodatkowej* (Teoría de la plusvalía, parte primera), Varsovia, 1959. Varios autores contemporáneos emplean la expresión «excedente económico» *(economic surplus)*; lo hace Melville J. HERSKOVITS, *Economic Anthropology*, ed. cit., p. 395 y las siguientes, y utiliza esta expresión en el sentido equivalente al término de Marx: «producto excedente». Paul BARAN, *La economía política del crecimiento*, F. C. E., México, 1961, pp. 39-61, también usa el término «excedente económico». En el trabajo de Baran el concepto de excedente económico es en parte más amplio y en parte más estrecho que el concepto de producto excedente de Marx. Finalmente el propio Baran lo toma en cuenta (pp. 39-40).

[89] Este término proviene de Marx. Véase C. MARX, *El Capital*, vol. 1, pág. 476 y las siguientes.

[90] Ver C. MARX, *El Capital*, t. I, pp. 488 y 496; t. II, pp. 435 y las siguientes.

miento, lo que frecuentemente está ligado a la forma material de éstos (por ejemplo, los medios especiales de alimentación, o bien los instrumentos e instalaciones para la enseñanza profesional). Por esta razón, cuando existe la reproducción ampliada, la mayor parte de los productos individuales que entran en la composición del producto excedente tiene una forma material de medios de producción, y en cuanto a una parte de esos productos que tienen forma material de medios de consumo, éstos adquieren un carácter de medios indispensables de mantenimiento.

En ciertas circunstancias, como en el caso de guerra o cataclismos (terremotos, inundaciones, las malas cosechas), puede suceder que la cantidad de productos elaborados en el proceso productivo no alcance para la renovación de los medios de producción ni tampoco para renovar la fuerza de trabajo. Este puede ser el resultado de una disminución considerable de la cantidad de los productos, como, por ejemplo, en el caso de malas cosechas, o bien de un fuerte desgaste de los medios de producción empleados para la renovación (como, por ejemplo, sucede a causa de la devastación producida por la guerra, o por un terremoto). Entonces la suma total de los medios de producción utilizados en el proceso productivo, así como también la fuerza de trabajo, o bien solamente uno de éstos, disminuyen, lo que a su vez lleva a la disminución de la cantidad de los productos fabricados. En ese caso decimos que ocurre *reproducción estrechada* [91].

Como se ve, en el proceso de reproducción aparecen diversas relaciones entre las cantidades indispensables para el mantenimiento y la cantidad de productos necesarios para la renovación de los medios de producción desgastados, lo cual, a su vez, depende de la suma total de los medios de producción que se están empleando, así como también de la rapidez con que éstas se desgastan. También se presenta la relación que existe entre las cantidades de productos fabricados en diversas formas materiales y la cuestión de asignar estos productos para los diferentes fines. Existen también determinadas relaciones entre la cantidad de los medios de producción desgastados, la cantidad de los diferentes trabajos concretos efectuados y la cantidad de los productos elaborados. Surge

[91] Como es sabido, Nicolás BUJARIN fue el primero en utilizar este concepto, denominándolo «reproducción negativa en escala ampliada». Ver N. BUJARIN, *Die Oekonomik der transformations periode*, Hamburgo, 1922, p. 43. En el modo de producción capitalista, la reproducción estrechada puede darse también en ciertas fases del ciclo coyuntural, o sea, durante los períodos de crisis y desgaste.

la cuestión, cuál es la parte de los productos individuales que constituye conjuntamente el producto excedente y en qué medida cada uno de los productos que entran en la composición del excedente están destinados a incrementar la suma total de los medios de producción, y en qué medida aumentan, en cambio, los medios indispensables para mantener la fuerza de trabajo. Finalmente, surge la pregunta, ¿qué magnitud tiene el aumento de la cantidad de los productos logrado en determinadas condiciones de reproducción en escala ampliada? Todas estas relaciones cuantitativas necesitan un examen minucioso.

CAPÍTULO II

RELACIONES CUANTITATIVAS EN LA PRODUCCION

I

La producción es un conjunto de procesos de trabajo coordinados, en los cuales la actividad humana consciente y dirigida hacia un fin predeterminado, es decir, el trabajo, transforma los objetos del trabajo y para lograrlo utiliza los medios de trabajo. En otras palabras: en la producción se opera la unificación del trabajo humano y de los medios de producción, y el producto constituye el resultado de esta unificación. «Como vemos, en el *proceso de trabajo* —dice Marx [1]— la actividad del hombre consigue, valiéndose del instrumento correspondiente, transformar el objeto sobre que versa el trabajo con arreglo al fin perseguido. Este proceso desemboca y se extingue en el *producto*... El trabajo se compenetra y confunde con su objeto. Se materializa en el objeto, al paso que éste se elabora. Y lo que en el trabajador era dinamismo es ahora en el producto, plasmado en lo que es, quietud. El obrero es el tejedor y el producto el tejido. Si analizamos todo este proceso desde el punto de vista de su resultado, del *producto,* vemos que ambos factores, los *medios de trabajo* y el *objeto* sobre que éste recae, son los *medios de producción* y el trabajo un *trabajo productivo*».

El trabajo y los medios de producción constituyen los factores del proceso productivo, o sea, *factores de producción*. Los factores de ese tipo son trabajos concretos, tales como: tejer, hilar, procesar metales, arar, transportar cargas, etcétera, así como también lo son los diversos medios de producción concretos, tales como la lana, el mineral de hierro, el ácido sulfúrico, las palas, las fresadoras, los motores eléctricos, las locomotoras, etcétera. Los tipos de trabajos concretos correspondientes constituyen los llamados factores productivos personales y requieren no sólo la existencia de personas capaces de efectuar el trabajo, sino que estas personas posean además una eficacia y destreza adecuadas, es decir, las cualificaciones. Los diferentes medios de producción constituyen entonces *fac-*

[1] C. MARX, *El Capital,* ed. cit., t. I, p. 133.

tores materiales de producción, y el carácter concreto de éstos y su forma expresan la técnica de producción, o sea, la técnica material aplicada a los procesos respectivos de trabajo [2].

Para elaborar un producto es necesario que se efectúe la unificación de los factores productivos personales y materiales. El modo que determina cómo esa unificación se lleve a cabo es distinto en los diferentes procesos sociales de producción, y lo que es más, éste constituye una propiedad que caracteriza un determinado modo de producción histórico. Marx lo señala claramente: «Cualesquiera que sean las formas sociales de la producción, sus factores son siempre dos: los medios de producción y los obreros. Pero tanto unos como otros son solamente, mientras se hallan separados, factores potenciales de producción. Para poder producir en realidad tienen que combinarse. Sus distintas combinaciones distinguen las diversas épocas económicas de la estructura social» [3]. En esta unificación, sin embargo, es diferente el papel que juegan los factores productivos materiales y personales. Los factores personales, o sea el trabajo humano, constituyen el factor creador activo del trabajo humano; los medios de trabajo, en cambio, es decir, los factores materiales de producción, constituyen los objetos materiales que son puestos en movimiento y transformados por el trabajo humano: «Es su trabajo productivo racional, el hilar, el tejer, el forjar, el que con su simple *contacto* hace resucitar a los medios de producción de entre los muertos, les infunde vida como factores del proceso del trabajo y los combina hasta formar con ellos productos» [4].

Por esta razón, al trabajo humano que constituye un factor activo en el proceso productivo lo designamos como *trabajo vivo,* en contraste con los medios de producción, que son resultado del trabajo anterior en una cierta manera materializado en éstos: «Para engendrar un valor de uso como *producto,* el proceso de trabajo absorbe, en concepto de *medios de producción,* otros valores de uso, producto a su vez de procesos de trabajo anteriores» [5]. El papel del trabajo vivo que tiene lugar en el proceso productivo Marx lo caracteriza con las siguientes palabras: «Una máquina que no presta servicio en el proceso de trabajo es una máquina inútil. Y no sólo es

[2] Marx usa los términos: elementos «personales» y «materiales» creadores de mercancías. Idem, t. II, p. 37.
[3] Idem, ibidem.
[4] Idem, t. I, p. 151.
[5] Idem, t. I, p. 133.

inútil, sino que además cae bajo la acción destructora del intercambio natural de materias. El hierro se oxida, la madera se pudre. La hebra no tejida o devanada es algodón echado a perder. El trabajo vivo tiene que hacerse cargo de estas cosas, resucitarlas de entre los muertos, convertirlas de valores de uso potenciales en valores de uso reales y activos» [6]. Los medios de producción llegan a ser «lamidos por el fuego del trabajo, devorados por éste como cuerpos suyos, fecundados en el proceso de trabajo con arreglo a sus funciones profesionales y a su destino» [7]. De esa manera el trabajo vivo pone en movimiento y mantiene en movimiento el proceso productivo; ese trabajo constituye una actividad humana consciente y dirigida a un fin determinado que utiliza los resultados del trabajo anterior, concretizado en los medios de producción. Los medios de producción son medios utilizados por la actividad humana —el trabajo vivo— para alcanzar la meta, que es la elaboración del producto [8].

La característica del proceso productivo descrita como un conjunto integrado por el trabajo y los medios de producción que conduce a la elaboración del producto puede representarse por medio del esquema:

$$\left[\begin{matrix}\text{trabajo} \\ \text{medios de producción}\end{matrix}\right] \longrightarrow \text{producto}$$

[6] Idem, t. I, p. 135.
[7] Idem, ibidem.
[8] La falta de diferenciación entre el papel activo que desempeñan los factores productivos personales y el papel auxiliar que juegan los medios de producción, que constituyen medios materiales de la actividad humana, es la base de la llamada teoría de factores productivos. Esta teoría, que proviene de J. B. Say (*Traité d'économie politique*, París, 1803), es ampliamente aceptada y divulgada entre los representantes de la llamada escuela austríaca, así como también por la escuela neoclásica. Esta considera el trabajo humano y los medios de producción factores equivalentes que fabrican el producto conjuntamente. Cada uno de estos factores productivos contribuye por igual a la elaboración del producto, «tiene participación» en la misma y es una creación de ambos factores conjugados. Esta teoría hace del proceso productivo un fetiche; concibe este proceso de una manera naturalista: como proceso natural de transformación automática de los factores productivos en producto. Colocando en el mismo nivel el trabajo humano y los factores materiales de producción, ésta pasa por alto el carácter humanista del proceso productivo como una actividad humana consciente y dirigida a un fin determinado. En la práctica, esta teoría sirve como base de las conclusiones apologéticas que justifican las categorías de distribución del producto social, propias del modo de producción capitalista, y las presenta como si éstas fueran supuestamente resultado del carácter natural del proceso productivo. Ver O. LANGE, *Economía Política*, t. I, ed. cit.

Al introducir los símbolos: **L**, para designar el trabajo; **Q**, para representar los medios de producción, y **P**, para designar el producto, este esquema puede escribirse en forma de:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{P}.$$

En este esquema **L** representa un conjunto de diversos trabajos concretos, por ejemplo, el hilar, el tejer, el procesar el metal, el montar, el sembrar, el arar, etcétera. De manera similar, **Q** representa el conjunto de diferentes medios de producción concretos, por ejemplo: el carbón, el mineral de hierro, instrumentos y máquinas de un tipo determinado, cierto tipo de terreno (tierras de siembra, prados y pastizales, tierras boscosas), etcétera. Los respectivos tipos de trabajos concretos, o bien los medios de producción que entran en la composición del conjunto **L** o **Q** los denominamos *componentes* de un conjunto dado [9].

El producto **P** que aparece a la derecha del esquema puede constituir un bien particular elaborado en el proceso productivo. Sin

[9] Los componentes del conjunto **L**, o sea, los tipos respectivos de trabajos concretos podemos designarlos por medio de $L_1, L_2, \ldots, L_m$, y los componentes del conjunto **Q**, o sea, los correspondientes medios de producción concretos mediante $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, entonces ilustramos simbólicamente estos conjuntos de la manera siguiente:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_m \\ Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{P}.$$

embargo, frecuentemente, en un mismo proceso productivo se elabora simultáneamente un número mayor de productos. Por ejemplo, en el mismo proceso productivo se fabrican radio-receptores y televisores, teniéndose en cuenta que los aparatos de radio y de televisión pueden ser de diferentes tipos. En un mismo proceso de transformación de petróleo crudo se puede elaborar gasolina (de diferentes calidades), parafinas, asfalto, así como también diferentes aceites. En un mismo proceso de la cría del ganado porcino se puede elaborar carne (de diversos tipos), grasa, piel y cerdas. En estos casos hablamos de *producción conjuntiva.* Algunas veces en la producción conjuntiva se distingue un producto principal, que constituye un objetivo de esta producción y los productos colaterales. Por ejemplo, en la cría del ganado, el producto principal es la carne; en cambio, la grasa, la piel y el pelo son productos colaterales. De la misma manera, durante el proceso de destilación de petróleo, la gasolina es el producto principal. No obstante, frecuentemente es difícil distinguir el producto principal de los productos colaterales; todos los productos creados en el proceso productivo conjuntivo constituyen por igual la meta de la actividad productiva. Esto ocurre en el caso de la fabricación conjuntiva de radio-receptores y aparatos de televisión, o bien en la elaboración de motocicletas, bicicletas y lanchas de motor. Si el proceso productivo tiene el carácter de producción conjuntiva, el símbolo **P** que aparece en el esquema arriba presentado representa un conjunto de productos respectivos elaborados en el proceso conjuntivo, los cuales constituyen los intregrantes de dicho conjunto [10].

Los trabajos concretos y los medios de producción, así como también el producto (o productos en caso de una producción global), constituyen magnitudes que se expresan por medio de números denominadores, que comprueban las unidades en que esas magnitudes suelen medirse. Estos números expresan la cantidad

[10] En este caso, los respectivos componentes del conjunto de productos **P** podemos representarlos mediante $P_1, P_2, \ldots, P_k$, es decir,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_k \end{bmatrix}$$

Eventualmente, se puede insertar este término en el lado derecho del esquema presentado en el apunte anterior.

que corresponde a cada una de las magnitudes. Los tipos respectivos de trabajo se miden generalmente en unidades de tiempo (horas de trabajo), es decir, en horas de trabajo efectuado por el obrero que cumple determinadas funciones. Los productos se miden en unidades de peso, volumen, longitud, en unidades de energía (por ejemplo, kilovatios, o simplemente por piezas). En cuanto a los medios de producción, el problema se presenta de modo diferente cuando se trata del capital circulante, o del fijo. El capital circulante se desgasta totalmente en el curso de un solo período productivo. Este desgaste se mide en unidades similares a las que se emplean tratándose de los productos, o sea, en unidades de peso, volumen, longitud, energía, por piezas, etcétera. El capital fijo, en cambio, conserva su forma natural por un lapso mayor a un período productivo. Estos, después de haber sido utilizados en el curso del período productivo, siguen siendo útiles aún posteriormente. Por consiguiente, aquí es correcta no la medida del desgaste como sucedía al tratarse del capital circulante, sino la medida de su utilización. La utilización se mide en unidades de tiempo, o sea, en horas de utilización de una máquina determinada, de un edificio determinado, de un vagón (es decir, en máquina-horas, edificio-horas, vagón-horas, etcétera). Las unidades de medida de los trabajos correspondientes aquí mencionados, los medios de producción y los productos los denominamos *unidades naturales.*

La cantidad de trabajo invertido en el proceso productivo, así como también la cantidad del capital circulante de producción y del capital fijo de producción, los denominamos con un nombre común: *desembolso* [11]. En cambio la cantidad de productos obtenidos la llamamos *rendimiento* de un proceso productivo dado [12]. Es evidente que tanto el desembolso (o desembolsos) como el rendimiento se miden en unidades naturales. Los desembolsos y el rendimiento están determinados para cubrir un lapso de tiempo dado, por ejemplo, para un período productivo, o bien para una unidad de tiempo (un mes, un trimestre, un año, etcétera). Por consiguiente, éstas tienen la dimensión de: «tantas o cuantas unidades naturales en tal o cual tiempo», es decir, cierta cantidad de unidades naturales en un determinado lapso de tiempo. Cuando cambia el período de tiempo que estamos considerando, cambia también la

[11] En inglés, *outlay;* en francés, *dépense;* en alemán, *Aufwand;* en ruso, *zatraty.*
[12] En inglés, *return;* en francés, *rendement;* en alemán, *Ertrag;* en ruso, *prichod.*

magnitud del desembolso y de una manera proporcional del rendimiento. Esto lo expresamos diciendo que los gastos tienen carácter de corrientes, o sea, de «flujo» de una cierta cantidad de unidades naturales en un lapso de tiempo determinado. Mientras que la cantidad del capital fijo que actúa en el proceso productivo (a diferencia del desembolso de la utilización de éstos) se mide en unidades naturales sin referirse al tiempo, por ejemplo, la cantidad de maquinaria, de edificios, de tierra cultivada, etcétera. Tales magnitudes determinadas sin relación al tiempo las denominamos *reservas* [13]. También se consideran reservas las provisiones de medios de circulación (en distinción al desembolso de éstos, es decir, de su desgaste ocurrido en el proceso productivo, el cual constituye una corriente).

Los desembolsos de los trabajos respectivos y los medios de producción, así como también el rendimiento del proceso productivo dado, pueden ser determinados para un establecimiento productivo correspondiente, o bien para un grupo de establecimientos de este tipo (por ejemplo, para un trust, o una asociación industrial), o también para toda una rama de producción (por ejemplo, para la industria siderúrgica). Los desembolsos y el rendimiento de un grupo de establecimientos o de toda una rama de la producción se obtienen a través de sumar los desembolsos y el rendimiento correspondientes en cada uno de los establecimientos productivos. Esto se lleva a cabo sumando por separado los gastos de los distin-

[13] Se sabe que todas las magnitudes físicas pueden expresarse en unidades de longitud, masa y tiempo (representadas por L, M, T), o sea, en unidades del sistema correspondiente: centímetro, gramo, segundo (cm., gr., seg.). Las unidades en que se expresa la magnitud física constituyen la dimensión de ésta, por ejemplo, la magnitud de la velocidad se apunta simbólicamente $\frac{L}{T} = LT^{-1}$, la magnitud de aceleración LT^{-2}, la de fuerza MLT^{-2}, la magnitud del trabajo mecánico ML^2T^{-2}, etcétera. De una manera análoga se puede hablar de las dimensiones de las magnitudes económicas. Cuando examinamos, por lo pronto, las magnitudes que se miden en unidades naturales y representamos las unidades naturales correspondientes por medio de N, las reservas tienen la dimensión N, y los flujos tienen la dimensión NT^{-1}. W. S. Jevons fue el que por primera vez empleó, de una manera sistemática, la dimensión de las magnitudes examinadas. Ver W. S. JEVONS, *The Theory of Political Economy*, Londres, 1871, capítulo III. Algunos errores cometidos por Jevons al tratar dicho problema los corrigió P. H. WICKSTEED, *The Common Sense of Political Economy*, Londres, 1946, t. II, anexo: *Dimensions of Economic Quantities*. Este anexo constituye una reedición del artículo publicado en *Palgrave's Dictionary of Political Economy* (Londres, 1894). Sobre ese tema consultar también S. C. EVANS, *Mathematical Introduction to Economics*, Nueva York-Londres, 1930, capítulo II, de las obras más recientes: A. BOYARSKI, *Matematico-economicheskiye ocherki*, Moscú, 1962, capítulo VII. Ver también O. LANGE, *Teoria reprodukcji i akumulacji*, Varsovia, 1965,

tos tipos de trabajos concretos, o bien de medios de producción concretos (y en caso de una producción conjuntiva, también de los productos respectivos). Como resultado se obtiene un conjunto de sumas que expresa el desembolso de trabajo o el de los medios de producción, o bien un rendimiento obtenido por un grupo de establecimientos productivos o ramas de producción. Estas sumas son componentes de este tipo de conjunto. Se demuestra que los conjuntos que expresan el desembolso de trabajo, el de los medios de producción y eventualmente el rendimiento pueden someterse a ciertos cálculos. Es decir, esos conjuntos se pueden sumar añadiendo los componentes de éstos; como resultado se obtiene un conjunto nuevo, cuyos elementos constituyen las sumas de los componentes de los conjuntos sumados. Además, como los desembolsos y el rendimiento tienen carácter de flujo, los conjuntos pueden multiplicarse por los números reales (no numerados). Esto sucede de tal modo que cada uno de los componentes se multiplica por un número dado, y, como resultado, surge un conjunto nuevo. Esta multiplicación se lleva a cabo cuando se opera un cambio en el período de tiempo examinado, por ejemplo, cuando se pasa del tiempo medido en períodos productivos al tiempo medido en unidades de calendario, o también cuando se alteran las unidades de tiempo del calendario (por ejemplo, los meses por años). De esto surge el hecho de que los conjuntos también se pueden dividir entre un número real (multiplicándolos por el inverso de éste), así como también se puede substraer (añadiendo un conjunto multiplicado por -1).

Las magnitudes expresadas por medio de los conjuntos (es decir, mediante sistemas ordenados libremente) de números reales, que tienen la característica de que pueden sumarse añadiendo los números correspondientes, que constituyen los componentes de éstos, así como también que pueden multiplicarse por un número real, multiplicando por éste los componentes respectivos, se llaman *magnitudes vectoriales* o simplemente *vectores* [14]. Los números reales, de los cuales se compone ese tipo de conjunto, se denominan *componentes* del vector. A diferencia de las magnitudes de vector, que son magnitudes expresadas mediante un número real singular, o sea, no por medio de un conjunto de números, se llaman *magnitu-*

pp. 19-21. [Traducción en castellano: *Teoría de la reproducción y de la acumulación*. Ed. Ariel, Barcelona, 1970, pp. 19-20.]

[14] Suponiendo que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sean sistemas ordenados de n números reales, decimos que los sistemas constituyen vectores n-dimensionales, y

des escalarias o bien *escalares.* La medición de las magnitudes escalarias se puede efectuar de acuerdo a una escala determinada (por ejemplo, de longitud o peso), de ahí proviene el nombre de éstas. En tanto que las magnitudes vectoriales no siempre pueden medirse según una escala determinada, porque cada uno de los componentes de éstos puede cambiar en una proporción diferente. Éstos pueden medirse de acuerdo a una cierta escala sólo en un caso particular cuando todos los componentes cambian en la misma proporción; por ejemplo, se duplican o se triplican. Como se ve, el desembolso del trabajo, así como también el de los medios de producción (las magnitudes **L** y **Q** en el esquema arriba presentado) son magnitudes vectoriales. El rendimiento (P) es una magnitud escalar si se fabrica un tipo de producto solamente, en cambio, constituye una magnitud vectorial en caso de producción conjuntiva.

los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$, así como también $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son las componentes de estos vectores, entonces escribimos

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

también

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

y

$$\lambda\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \lambda\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \lambda y_1 \\ \lambda y_2 \\ \vdots \\ \lambda y_n \end{bmatrix},$$

donde λ es un número real cualquiera (escalar). Los componentes de los vectores pueden también presentarse en forma horizontal en vez de vertical, es decir, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, así como también $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Además, decimos que los vectores **x**, **y** son iguales, o sea, que se produce la equivalencia de $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, cuando todos los componentes de éstos son iguales, es decir, $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$.

II

La relación que existe entre el rendimiento y el desembolso de trabajo, así como también entre los medios de producción, constituye una relación cuantitativa fundamental, que se opera en la producción. Esta relación depende de un conjunto de condiciones que Marx define con el nombre de fuerza productiva del trabajo. La fuerza productiva del trabajo estriba en «según el grado de desarrollo de las condiciones de producción, la misma cantidad de trabajo puede dar por resultado en el mismo espacio de tiempo una cantidad mayor o menor de productos» [15]. La fuerza productiva del trabajo depende del desarrollo global de las fuerzas productivas en las condiciones históricas dadas. «La capacidad productiva del trabajo —afirma Marx— depende de una serie de factores, entre los cuales se cuentan el grado medio de destreza del obrero, el nivel de progreso de la ciencia y de sus aplicaciones, la organización social del proceso de producción, el volumen y la eficacia de los medios de producción y las *condiciones naturales*» [16]. El resultado concreto del cambio de la fuerza productiva del trabajo es la modificación de la cantidad del producto, es decir, del rendimiento que está vinculado con un determinado desembolso de trabajo (o sea, el trabajo vivo), así como también, al cambio de los medios de producción.

Con el objeto de efectuar un examen más detallado de este nexo analizaremos el desembolso de los respectivos medios de producción concretos, que corresponde a la unidad de un producto obtenido. Este desembolso lo denominamos desembolso unitario. Éste se logra dividiendo todos los desembolsos entre la cantidad del producto obtenido; los cocientes resultantes de esta división constituyen los componentes del desempleo unitario. Empleando

[15] C. MARX, *El Capital*, t. I, p. 434. Sobre el tema del concepto de la fuerza productiva del trabajo en las obras de Marx, así como también acerca de la relación que existe entre esta concepción y el concepto de productividad del trabajo, del cual hablaremos más abajo, ver S. STRUMILIN: *Problemy wydajnosci pracy*, Varsovia, 1959, p. 33 y las sig., y F. D. MARKUZON, *Izmieniye proizboditielnosti truda v kapitalistichekij gosudarstvaj, Uchoniye zapiski po statistikie*, Moscú, 1957, t. III, p. 249. Ver también B. MINC, *Ekonomia politiczna socjalizmu* (Economía Política del Socialismo), Varsovia, 1963, pp. 190-193.

[16] C. MARX, *El Capital*, t. I, p. 42 [de la ed. polaca].

«Por *aumento de la capacidad productiva del trabajo* entendemos un *cambio* cualquiera sobrevenido en el proceso de trabajo, por virtud del cual se reduce el tiempo de trabajo socialmente necesario para la producción de una mercancía; es decir, gracias al cual una cantidad más pequeña de trabajo adquiere potencia suficiente para producir una cantidad mayor de valores de uso.» (T. I, p. 252 de la ed. de F. C. E.)

los símbolos del esquema introducido anteriormente y que representa el proceso productivo, el desembolso puede expresarse en forma de esquema [17].

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathbf{L}}{P} \\ \frac{\mathbf{Q}}{P} \end{bmatrix}$$

En este esquema $\frac{\mathbf{L}}{P}$ representa el conjunto (vector) de desembolsos unitarios de los respectivos tipos de trabajos concretos, y $\frac{\mathbf{Q}}{P}$ representa el conjunto (vector) de desembolsos unitarios de los correspondientes medios de producción concretos. Los componentes de este conjunto, o sea, los desembolsos unitarios particulares, se definen frecuentemente como *coeficientes técnicos de producción* [18], por la razón de que éstos dependen de las condiciones técnicas en las cuales se lleva a cabo el proceso productivo. Los coeficientes de

[17] En este esquema $\frac{\mathbf{L}}{P}$ y $\frac{\mathbf{Q}}{P}$ son producto del vector $\mathbf{L}$, así como también, del vector $\mathbf{Q}$ y del número real $\frac{1}{P}$. Supondremos que $L_1, L_2, \ldots, L_m$ y $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ son componentes de estos vectores. Entonces

$$\frac{\mathbf{L}}{P} = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{P} \\ \frac{L_2}{P} \\ \vdots \\ \frac{L_m}{P} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{\mathbf{Q}}{P} = \begin{bmatrix} \frac{Q_1}{P} \\ \frac{Q_2}{P} \\ \vdots \\ \frac{Q_n}{P} \end{bmatrix}$$

también el esquema arriba ilustrado se puede presentar en una forma que haga resaltar los componentes.

[18] Ver O. LANGE, *Wstep do ekonometrii*, Varsovia, 1961, pp. 213-214, [traducción en castellano: *Introducción a la econometría*, F. C. E., México, 1964]; así como también O. LANGE, *Teoría reprodukcji i akumulacji*, pp. 68-69, [traducción castellana citada, pp. 75-79]. Los coeficientes de producción fueron introducidos de una manera sistemática al análisis económico por LEON WALRAS, *Elements d'economie politique pure*, París, 1874, capítulo IV. Walras utilizaba el término *coeficientes de fabricación*.

producción son, por lo tanto, desembolsos de los trabajos concretos, así como también, de los medios de producción concretos, que en determinadas condiciones técnica son necesarios para producir una unidad de producto [19].

Los desembolsos unitarios, o sea, los coeficientes de producción se miden en unidades naturales; tantas toneladas de mineral de hierro por una tonelada de acero; tantas toneladas de carbón por una hora kilovatio de energía eléctrica; tantas máquinas-horas u hombre-horas por un metro de tela, etc. Estos coeficientes constituyen la relación de dos corrientes: la de los desembolsos y la del producto en un período de tiempo dado; al efectuarse la división, la dimensión de tiempo se reduce y queda la relación de unidades naturales; por ejemplo, la relación que existe entre las toneladas de mineral de hierro y las toneladas de acero [20].

Es posible dividir los desembolsos entre la cantidad de un producto obtenido únicamente cuando el rendimiento constituye una magnitud escalaria. En caso de la producción conjuntiva, el rendimiento constituye el vector, es decir, el conjunto de productos respectivos. Entonces, elegimos de una manera convenida uno de los productos como «producto de referencia» y calculamos los desembolsos unitarios correspondientes, o sea, los coeficientes de producción en relación al producto de referencia. Junto a los coeficientes de producción obtenemos entonces unos coeficientes adicionales que expresan la cantidad de productos obtenidos conjuntamente con la unidad del producto de referencia [21].

[19] En la práctica de planificación los coeficientes de producción se llaman *normas técnicas*.

[20] Por medio de $N_c T^{-1}$ designamos la dimensión del desembolso del factor productivo, y mediante $N_p T^{-1}$ la dimensión del producto (o sea, del rendimiento). Entonces la dimensión del desembolso unitario es

$$\frac{N_c T^{-1}}{N_p T^{-1}} = \frac{N_c}{N_p}.$$

[21] Supongamos que $P_1, P_2, \ldots, P_k$ sean componentes del vector **P**, el cual expresa el rendimiento en el proceso productivo conjuntivo y que P_1 por ejemplo sea el componente que corresponde al producto de referencia. Obtendremos entonces los coeficientes

$$\frac{P_2}{P_1}, \frac{P_3}{P_1}, \ldots, \frac{P_k}{P_1}.$$

Para más detalles ver O. LANGE, *Optymalne decyzje*, Varsovia, 1964, p. 158. [Traducción castellana: *Teoría general de la programación. (Decisiones óptimas)*. Ariel, Barcelona, 1971.]

En vez de examinar los desembolsos de los factores productivos, es decir, de los coeficientes de producción, se puede analizar también el inverso de éstos. Al inverso del desembolso unitario lo denominamos productividad del factor productivo dado. Por consiguiente, hablamos de la productividad del trabajo y de la misma con respecto a los medios de producción. La productividad del trabajo constituye un conjunto (vector) de la productividad de los respectivos tipos concretos individuales de trabajo vivo aplicado en el proceso productivo; la capacidad de los medios de producción constituye un conjunto (vector) de la productividad de los correspondientes medios de producción concretos. Cada uno de los trabajos concretos y cada medio de producción concreto posee una productividad característica propia [22]. Esta productividad depende de la técnica de producción aplicada, y al mismo tiempo aparece el vínculo existente entre la productividad del trabajo (es decir, del trabajo vivo) y el desembolso de los medios de producción. Por lo regular, una productividad mayor del trabajo requiere un mayor desembolso de medios de producción unificados con éste. La productividad del trabajo aumentada está vinculada al procesamiento de mayores cantidades de materias primas, así como también exige que el trabajo vivo disponga en un grado superior de los medios de trabajo. Marx lo toma en consideración. «Por consiguiente, el aumento de ésta se revela en la disminución de la masa de trabajo, puesta en relación con la masa de medios de producción movidos por ella, o sea, en la disminución de magnitud del factor subjetivo del proceso de trabajo, comparado con su factor objetivo» [23]. El grado social de productividad del trabajo se refleja en el volumen relativo de medios de producción que el obrero convierte en pro-

[22] En *El Capital,* Marx habla sobre la productividad de los medios de producción, t. I, pp. 472 y 511. Además, él utiliza la expresión eficacia *(Wirkungsfähigkeit, Wirksamkeit)* de los medios de producción.

[23] C. MARX, *El Capital,* t. I, pp. 525-526. Marx explica allí de una manera más detallada: «Los medios de producción desempeñan aquí un doble papel. El incremento de unos es *efecto,* el de otros *condición* determinante de la creciente productividad del trabajo. Así, por ejemplo, con la división manufacturera del trabajo y la aplicación de maquinaria se elabora más materia prima durante el mismo tiempo; es decir, el proceso de trabajo absorbe una masa mayor de materias primas y materias auxiliares. Esto es *efecto* de la creciente productividad del trabajo. De otra parte, la masa de maquinaria puesta en movimiento, de ganado de labor, de abonos minerales, de tubos de drenaje, etc., es *condición* de aquella productividad creciente. Y lo mismo la masa de medios de producción concentrados en los edificios, altos hornos, medios de transporte, etc. Pero, sea *condición* o *efecto,* el volumen creciente de los medios de producción comparado con la fuerza de trabajo que absorben expresa siempre la *productividad creciente del trabajo.*»

ducto durante cierto tiempo y con la misma tensión de la fuerza de trabajo. La masa de medios de producción con que un obrero opera crece al crecer la productividad de su trabajo.

Una técnica de producción determinada se distingue por un conjunto (vector) de desembolsos unitarios determinados, o sea, coeficientes de producción, o bien —lo que es lo mismo— por una determinada productividad de los factores productivos respectivos. El producto en cuestión puede, por regla general, elaborarse con ayuda de diferentes técnicas de producción, o sea, como decimos, mediante diversos *procesos técnicos*. Cada uno de estos procesos se caracteriza por un vector de desembolsos unitarios que corresponde a dicho proceso (de coeficientes de producción). Si el producto dado puede fabricarse con la ayuda de diferentes procesos técnicos, esta situación puede expresarse esquemáticamente a través de la siguiente tabla [24]:

$$\begin{bmatrix} \frac{L_1}{P} & \frac{L_2}{P} & \cdots & \frac{L_r}{P} \\ \frac{Q_1}{P} & \frac{Q_2}{P} & \cdots & \frac{Q_r}{P} \end{bmatrix}$$

[24] Dicha tabla puede escribirse en forma desarrollada, la cual pone en evidencia los componentes de los desembolsos unitarios de trabajo y de los medios de producción. En su forma desarrollada, la tabla se presenta de la manera siguiente:

$$\begin{bmatrix} \frac{L_{11}}{P} & \frac{L_{12}}{P} & \cdots & \frac{L_{1r}}{P} \\ \frac{L_{21}}{P} & \frac{L_{22}}{P} & \cdots & \frac{L_{2r}}{P} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{L_{m1}}{P} & \frac{L_{m2}}{P} & \cdots & \frac{L_{mr}}{P} \\ \frac{Q_{11}}{P} & \frac{Q_{12}}{P} & \cdots & \frac{Q_{1r}}{P} \\ \frac{Q_{21}}{P} & \frac{Q_{22}}{P} & \cdots & \frac{Q_{2r}}{P} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{Q_{n1}}{P} & \frac{Q_{n2}}{P} & \cdots & \frac{Q_{nr}}{P} \end{bmatrix}$$

En esta tabla, cada columna designa un conjunto (vector) de desembolsos unitarios, que corresponden al proceso técnico dado. Cada línea horizontal de la tabla representa el desembolso unitario del factor productivo dado, requerido durante la aplicación de diferentes procesos técnicos. Esa tabla se denomina *matriz de la técnica de producción*[25].

Los procesos técnicos pueden también diferenciarse en cuanto a la duración del período productivo. Tales diferencias, sin embargo, pueden reducirse a la divergencia que existe en los desembolsos unitarios. Si en dos procesos técnicos la cantidad de factores productivos consumidos o utilizados, así como también la cantidad de un producto obtenido, es la misma, y, además, un período es de mayor duración que el otro, entonces la cantidad de producto obtenido en una unidad de tiempo, es decir, el rendimiento, es menor en aquel proceso en el que el período productivo es más largo. Los desembolsos unitarios son, entonces, proporcionalmente mayores. Esta diferencia encuentra su expresión en la matriz de la técnica de producción. Además, en distintos períodos de tiempo, los desembolsos de los factores productivos pueden ser distribuidos en el tiempo de diferentes maneras. En este caso, los desembolsos que hay en los diferentes períodos de tiempo pueden considerarse como desembolsos de los diversos factores productivos. La diferente distribución de los gastos en el tiempo puede entonces presentarse en la matriz de la técnica de producción.

Aquí el primer indicador representa el gasto de un factor productivo determinado y el segundo representa el proceso técnico. Por ejemplo, L_{ij} designa el desembolso del tipo de trabajo i en el proceso técnico j.

[25] Las matrices son tablas rectangulares que se componen de números que pueden someterse a determinados cálculos, o sea, a operaciones algebraicas, como sumar, multiplicar y dividir por un número real (escalar). Como se ve en el texto, las matrices también pueden considerarse como conjuntos de vectores. Sobre el hecho de que la tabla mencionada en el texto constituya una matriz, ver el apéndice *Observaciones matemáticas*. La presentación de diversas técnicas de producción para un producto dado fue introducida en forma de matriz por T. C. KOOPMANS en su trabajo: *Analysis of production as an Efficient Combination of Activities*. Dicho trabajo apareció en un conjunto redactado por el mismo autor: *Activity Analysis of Production and Allocation*, Nueva York, 1951. Una exposición más accesible de esa concepción se encuentra en el libro de T. C. KOOPMANS, *Three Essays on the State of Economic Science*, Nueva York, 1957, pp. 68-79. Koopmans define los procesos técnicos correspondientes con el nombre de actividades *(activity)*, y el análisis del proceso productivo efectuado a través del examen de los diferentes procesos técnicos lo llama análisis de la actividad *(activity analysis)*. Actualmente ese nombre es comúnmente aceptado. La base del análisis de las actividades es expuesta por O. LANGE, *Optymalne decyzje*, ed. cit., [véase traducción castellana citada]; y R. G. D. ALLEN, *Economía matemática*. Aguilar, Madrid, 1965, pp. 387-391, 565, 644 y ss.

La matriz de la técnica productiva ilustra la variedad de procesos técnicos con cuya ayuda puede elaborarse un producto dado. Si dicho producto es elaborado mediante uno de los procesos técnicos al cual le corresponde una determinada columna de desembolsos unitarios dentro de la matriz de la técnica de producción, decimos que el producto está siendo elaborado por medio de un proceso técnico *puro*. Sin embargo, el producto en cuestión puede elaborarse de tal manera, que cierta cantidad del producto sea fabricada mediante un proceso técnico y otra cantidad del mismo se elabore por medio de un proceso técnico diferente, y otra parte, aún, eventualmente puede ser fabricada con ayuda de un tercer proceso técnico, etcétera. Decimos entonces que el producto se elabora por medio de un proceso técnico *mixto*. El proceso técnico mixto consiste en fabricar diferentes cantidades del mismo producto por medio de distintos procesos técnicos puros. Cuando se emplea el proceso técnico mixto, los desembolsos unitarios (los coeficientes de producción) de los factores respectivos de producción constituyen un promedio balanceado de desembolsos unitarios en los procesos técnicos, de los cuales se compone el proceso mixto. Las balanzas de este proceso están constituidas por las cantidades de productos elaborados mediante los procesos técnicos correspondientes.

Efectivamente, supongamos que a_{i1} sea un desembolso unitario de un determinado (según la numeración aceptada) factor productivo i en el primer proceso técnico, y a_{i2} sea un desembolso unitario del mismo factor en el segundo proceso técnico. Digamos que la cantidad x_1 de un producto dado es elaborada mediante el primero y la cantidad x_2, por medio del segundo proceso técnico. Entonces en el primer proceso técnico el desembolso global es $a_{i1} x_1$, y en el segundo proceso lo es $a_{i2} x_2$. Conjuntamente el desembolso del factor productivo es $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2$. En suma, en ambos procesos técnicos es elaborada la cantidad de producto igual a $x_1 + x_2$. De modo que el desembolso unitario del factor productivo en el proceso mixto es

$$\frac{a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2}{x_1 + x_2}, \tag{1}$$

o sea, éste constituye un promedio ponderal de desembolsos unitarios en los dos procesos. Esto concierne a todos los factores productivos (es decir, a todos los índices i posibles). El razonamiento

puede generalizarse para cualquier número de procesos técnicos. De esta manera, de la matriz de la técnica de producción pueden también deducirse los desembolsos unitarios que corresponden a todo tipo de procesos técnicos mixtos.

En los procesos técnicos respectivos, como regla, puede cambiar (dentro de ciertos límites determinados por el carácter del proceso) la dimensión de la producción, o sea, la cantidad de productos elaborados. Una atención especial la merecen los procesos en los cuales el cambio de dimensión de la producción no trae consigo, como consecuencia, ninguna alteración de desembolsos unitarios de los factores productivos, es decir, de los coeficientes de producción. En dichos procesos, los desembolsos son proporcionales a la dimensión de la producción, y los coeficientes de producción (los desembolsos unitarios) constituyen magnitudes constantes, independientes de la dimensión de la producción. Tales procesos se llaman *divisibles* [26] porque pueden ser libremente fraccionados en procesos de producción de una dimensión menor, donde cada uno de éstos conserva las mismas proporciones entre los desembolsos y rendimientos, entre los desembolsos respectivos —y en la producción conjuntiva—, también entre las cantidades de productos correspondientes. Los procesos técnicos divisibles puros se distinguen por la característica de que éstos siempre pueden ser sustituidos por los procesos mixtos, que se componen de procesos puros con una dimensión menor de producción, siendo que al mismo tiempo cada uno de los procesos mixtos es, a su vez, igualmente divisible, es decir, los coeficientes de producción que le corresponden son independientes de la dimensión de la producción. Esto resulta del hecho de que el promedio ponderal de desembolsos unitarios que aparece en el modelo (1) depende solamente de la relación $\frac{x_2}{x_1}$, o sea, de la proporción en la que la dimensión de la producción ha sido fraccionada en procesos individuales que entran en la composición del proceso mixto. Esto no depende de la dimensión absoluta de la producción. La unificación de los procesos técnicos divisibles mixtos origina también un proceso mixto divisible. Los procesos técnicos divisibles pueden, por consiguiente, mezclarse libremente obteniendo siempre como resultado un proceso divisible.

[26] Los procesos técnicos divisibles se definen también como lineales, porque la relación cuantitativa que existe entre el desembolso y el rendimiento tiene carácter de proporcionalidad simple, es decir, de una función lineal.

III

En los diferentes procesos técnicos (puros o mixtos) que se presentan en la elaboración de un producto dado, entre los desembolsos unitarios, ocurren ciertos nexos. Supongamos que en algún proceso técnico los desembolsos unitarios de todos los factores productivos sean mayores que en cualquier otro proceso, o bien que el desembolso unitario por lo menos de un factor productivo sea mayor, y el desembolso de ningún otro factor productivo no sea menor. Un proceso técnico de este tipo lo llamaremos *infuncional.* Un proceso técnico infuncional no será aplicado en el proceso productivo porque exige un mayor —que cualquier otro proceso técnico existente— desembolso de todos los factores productivos o, por lo menos, de uno de ellos, sin que decrezca el desembolso de otro factor. Por consiguiente, los procesos técnicos infuncionales pueden ser eliminados de la matriz de la técnica productiva tachando las columnas correspondientes. Si dos (o más) procesos técnicos requieren exactamente los mismos desembolsos unitarios de los factores productivos correspondientes diremos que éstos son equivalentes. Los procesos técnicos equivalentes pueden considerarse como un solo proceso. Si en la matriz de la técnica de producción se presentan procesos técnicos equivalentes basta retener en la matriz solamente uno de ellos, los demás pueden eliminarse como superfluos, tachando las columnas correspondientes.

Al eliminar de la matriz de la técnica de producción los procesos técnicos infuncionales, así como también los procesos equivalentes superfluos, obtenemos una matriz *efectiva* de la técnica de producción. La matriz efectiva de la técnica de producción es resultado de una selección en la cual se suprimieron los procesos infuncionales y los procesos equivalentes superfluos. Los procesos técnicos que quedan después de haber llevado a cabo la selección, los denominamos procesos técnicos efectivos. En el proceso productivo se efectúa una elección (y eventualmente mezcla) sólo entre los procesos técnicos efectivos.

Los procesos técnicos efectivos poseen la siguiente propiedad. Entre dos procesos de cualquier tipo, en uno de ellos el desembolso unitario de por lo menos un factor productivo tiene que ser mayor, así como también el desembolso unitario por lo menos de un factor productivo tiene que ser menor que en el segundo proceso. Por la razón de que si los desembolsos unitarios de todos los procesos productivos fuesen iguales en ambos procesos, estos pro-

cesos serían equivalentes. No obstante, si el desembolso unitario de un factor productivo fuese en uno de los procesos mayor o menor que en el otro y los desembolsos unitarios de los factores restantes fueran iguales en ambos procesos; uno de los procesos sería infuncional. Por consiguiente, a un mayor desembolso unitario de un solo factor productivo tiene que corresponder menor desembolso unitario, por lo menos de un distinto factor productivo (y a la inversa). Esta propiedad de los procesos técnicos efectivos la llamamos *ley de sustitución de desembolsos.* Cuando existe un cambio en el proceso técnico, mediante el cual se fabrica una cantidad determinada de productos, siempre sobreviene un incremento del desembolso unitario por lo menos de un factor productivo, así como también ocurre una disminución del desembolso unitario por lo menos de un diferente factor productivo, o sea, como decimos, se opera la sustitución de desembolsos.

La ley de sustitución de los desembolsos puede también expresarse de la siguiente manera: al cambiar el proceso técnico se opera una modificación en la proporción de los desembolsos unitarios por lo menos de dos factores productivos. Las proporciones de los desembolsos unitarios, de los factores restantes pueden modificarse, o bien pueden permanecer invariables. Por lo tanto, la sustitución debe abarcar, por lo menos, dos factores productivos; puede, pero no tiene que abarcar forzosamente un número mayor de éstos. En la práctica, un papel singularmente importante lo juega la sustitución que ocurre entre el desembolso de los factores productivos personales y los efectivos, es decir, entre el desembolso del trabajo y el de los medios de producción. Aún tendremos la oportunidad de volver a tocar esta cuestión.

En la producción conjuntiva aparece también en ciertas condiciones *la ley de sustitución de los rendimientos,* o sea, cantidades de los productos respectivos. Esto sucede cuando en dos diferentes procesos técnicos, los desembolsos unitarios de los factores productivos son iguales. En este caso dichos procesos tienen que diferenciarse en cuanto a la cantidad de productos elaborados con desembolsos de factores dados (de otra manera éstos serían equivalentes). Si al existir los mismos desembolsos de los factores productivos, un proceso fabrica una mayor (menor) cantidad del producto dado que el otro proceso, entonces éste tiene que elaborar una menor (mayor) cantidad, por lo menos de uno de los otros productos. De otro modo, uno de los procesos resultaría infuncional si los desembolsos de los factores productivos fuesen iguales, un proceso

fabricaría la cantidad menor de uno de los productos que el otro proceso, siendo iguales las cantidades de los demás productos. De una manera similar, cuando se trata de los desembolsos de los factores productivos, la sustitución tiene que abarcar una cantidad por lo menos de dos productos; puede, pero no necesariamente, abarcar un número mayor de éstos.

Cuando los procesos técnicos efectivos son divisibles, aparte de la ley de sustitución de los gastos, se realiza también *ley de la cuota creciente de sustitución de los desembolsos,* y bajo ciertas condiciones, al efectuarse una producción también global *la ley de la cuota decreciente de sustitución de los rendimientos.*

Examinemos tres procesos técnicos efectivos. Designemos con a_{i1}, a_{i2}, así como también con a_{i3} los gastos unitarios (los coeficientes de producción) del factor productivo i en los tres procesos mencionados; los desembolsos unitarios del factor productivo j lo designaremos de la manera correspondiente con a_{j1}, a_{j2} y a_{j3}. Aceptemos que los gastos de estos dos factores productivos, precisamente, son los que sufren sustitución. Reemplazando el primer proceso técnico por el segundo, aumentamos el desembolso unitario del factor i ó $a_{i2} - a_{i1}$, y, a la vez, disminuimos el desembolso unitario del factor j ó $a_{j2} - a_{j1}$ [27]. El valor absoluto de la relación de estos cambios en los desembolsos unitarios, o sea,

$$\left|\frac{a_{i2} - a_{i1}}{a_{j2} - a_{j1}}\right|$$

expresa un incremento del desembolso unitario del factor productivo i, por una unidad de decrecimiento del desembolso unitario del factor j. Dicha expresión la denominaremos *cuota de sustitución.* Reemplazando el segundo proceso técnico con el tercero y aceptando que el desembolso unitario del factor i sigue creciendo, y el gasto unitario del factor j sigue decreciendo, obtenemos análogamente un nivel de sustitución.

$$\left|\frac{a_{i3} - a_{i2}}{a_{j3} - a_{j2}}\right|.$$

[27] Puesto que la numeración de los factores productivos es libre, siempre podemos aceptar que el factor cuyo desembolso unitario aumenta constituye el factor i, en cambio, el factor cuyo desembolso unitario disminuye constituye el factor j.

Si, como suponemos, los procesos son divisibles, tiene que realizarse la desigualdad,

$$\left|\frac{a_{i2}-a_{i1}}{a_{j2}-a_{j1}}\right| < \left|\frac{a_{i3}-a_{i2}}{a_{j3}-a_{j2}}\right|, \tag{2}$$

es decir, cuando existe la sustitución de gastos vinculada a un cambio consecutivo de los procesos técnicos, el nivel de sustitución crece.

Como sabemos, los procesos técnicos divisibles pueden mezclarse libremente. Tomemos, por lo tanto, del primer y tercer proceso en cualquier proceso mixto, que dé una cantidad igual de producto (dimensión de la producción) que el segundo proceso. Designemos con $\bar{a}_{i2}$ y $\bar{a}_{j2}$ los desembolsos unitarios de los factores productivos i y j en este proceso mixto. Por consiguiente, de acuerdo con la fórmula (1) tenemos

$$\bar{a}_{i2} = \frac{a_{i1}x_1 + a_{i3}x_3}{x_1 + x_3} \quad \text{y} \quad \bar{a}_{j2} = \frac{a_{j1}x_1 + a_{j3}x_3}{x_1 + x_3},$$

donde x_1 y x_3 representan la dimensión de producción de los procesos primero y tercero que entran en la composición del proceso mixto. De ahí resulta que

$$\frac{\bar{a}_{i2}-a_{i1}}{\bar{a}_{j2}-a_{j1}} = \frac{a_{i1}x_1 + a_{i3}x_3 - a_{i1}(x_1+x_3)}{a_{j1}x_1 + a_{j3}x_3 - a_{j1}(x_1+x_3)} = \frac{a_{i3}-a_{i1}}{a_{j3}-a_{j1}}$$

así como también

$$\frac{a_{i3}-\bar{a}_{i2}}{a_{j3}-\bar{a}_{j2}} = \frac{a_{i3}(x_1+x_3) - a_{i1}x_1 - a_{i3}x_3}{a_{j3}(x_1+x_3) - a_{j1}x_1 - a_{j3}x_3} = \frac{a_{i3}-a_{i1}}{a_{j3}-a_{j1}}.$$

Por consiguiente, ocurre

$$\frac{\bar{a}_{i2}-a_{i1}}{\bar{a}_{j2}-a_{j1}} = \frac{a_{i3}-\bar{a}_{i2}}{a_{j3}-\bar{a}_{j2}},$$

es decir, ambos niveles de sustitución son iguales.

Si el segundo proceso técnico es efectivo tiene que realizarse, o bien

$$a_{i2} < \bar{a}_{i2} \quad \text{y} \quad a_{j2} \leqslant \bar{a}_{j2}$$

o bien

$$a_{i2} \leqslant \bar{a}_{i2} \quad \text{y} \quad a_{j2} < \bar{a}_{j2},$$

o sea, el gasto unitario de un factor productivo tiene que ser menor en el segundo proceso que en el proceso mixto, y el desembolso unitario del segundo factor no puede ser mayor (de otra manera, el segundo proceso sería equivalente al proceso mixto, o simplemente sería funcional). Después de introducir en la expresión arriba presentada: a_{i2} y a_{i3} en lugar de $\overline{a}_{i2}$ y $\overline{a}_{j2}$, y después de haber considerado estas igualdades, resulta que del lado izquierdo disminuimos el numerador o bien aumentamos el denominador, o efectuamos ambas operaciones. En cambio, del lado derecho aumentamos el numerador o disminuimos el denominador, o ambas cosas. Como resultado obtenemos

$$\left|\frac{a_{i2} - a_{i1}}{a_{j2} - a_{j1}}\right| < \left|\frac{a_{i3} - a_{i2}}{a_{j3} - a_{j2}}\right|.$$

Resulta que al pasar consecutivamente a otros procesos técnicos, cada vez el nivel de sustitución del desembolso crece. Esta es la ley del nivel creciente de sustitución de los desembolsos [28]. Dicha ley expresa una creciente dificultad de sustitución: la sustitución de cada una de las siguientes unidades del factor productivo, dado que requiere un incremento cada vez mayor del desembolso del segundo factor. Esto también puede expresarse de la manera siguiente: durante un reemplazamiento consecutivo de un factor productivo con otro, la productividad relativa del segundo factor disminuye.

De un modo análogo se puede demostrar que, en caso de una producción conjuntiva en las condiciones en que se realiza la ley de sustitución de los ingresos, los procesos técnicos efectivos y divisibles cumplen, en relación a los productos, con la ley del nivel decreciente de sustitución [29]. La sustitución de los productos se hace cada vez más difícil: el hecho de que un producto disminuya por sus unidades subsecuentes se vincula con cada vez menores incrementos del segundo producto. Hay que señalar que la ley del nivel creciente de sustitución de los desembolsos, así como también la ley del nivel decreciente de sustitución de los rendimientos que se presenta bajo ciertas condiciones, se refieren sólo a los factores productivos o a los productos que se encuentran dentro de la ley de sustitución. Dichas leyes expresan ciertas limitaciones ulteriores

[28] La interpretación gráfica de la ley del nivel creciente de sustitución de los desembolsos se encuentra en el apéndice *Observaciones matemáticas*, párrafo 6.

[29] Sobre esta cuestión consultar el apéndice *Observaciones Matemáticas*, párrafo 6.

de la sustitución; aun cuando se realiza la sustitución, ésta se lleva a cabo en condiciones cada vez más difíciles.

El resultado de la creciente dificultad de la sustitución, que es propia de los procesos técnicos efectivos divisibles, constituye *la ley de los crecientes desembolsos adicionales*. Esta ley aparece cuando aumenta la dimensión (la cantidad del producto) mediante una transición consecutiva de un proceso técnico al otro, y cuando los desembolsos de todos los factores productivos con excepción de uno de éstos, permanecen invariables. El incremento de la dimensión de producción, en dichas condiciones, requiere que aumente el desembolso del factor que sufre la modificación, porque, de otra manera, los procesos técnicos no serían efectivos (sería posible aumentar la producción sin aumentar el desembolso de factor alguno, o sea, obtener la misma cantidad del producto con un menor desembolso unitario por lo menos de un factor). En el campo de las relaciones que existen entre el desembolso y el producto, esto constituye un equivalente de la ley de sustitución de los desembolsos, o bien, de los rendimientos en la producción conjuntiva [30]. Resulta que, cuando los procesos técnicos efectivos son divisibles, los subsecuentes incrementos unitarios del producto requieren una cantidad cada vez mayor de desembolsos adicionales de un factor dado.

Supongamos que el gasto del factor i sea variable. Designemos con a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} su desembolso unitario en tres procesos y con x_1, x_2, x_3, la dimensión de la producción en estos tres procesos. Aceptamos que $x_1 < x_2 < x_3$. El gasto del factor dado en los procesos respectivos es $a_{i1}x_1$, $a_{i2}x_2$, $a_{i3}x_3$. Al pasar del primer proceso al segundo, el desembolso crece $a_{i2}x_2 - a_{i1}x_1$, y al pasar del segundo al tercer proceso éste crece $a_{i3}x_3 - a_{i2}x_2$. Por cada unidad de incremento del producto, los incrementos de los desembolsos, o sea, los desembolsos adicionales, son iguales a

$$\frac{a_{i2}x_2 - a_{i1}x_1}{x_2 - x_1} \quad \text{y} \quad \frac{a_{i3}x_3 - a_{i2}x_2}{x_3 - x_2}.$$

[30] Esto se hace evidente cuando se define el rendimiento como un desembolso negativo. Entonces, el incremento del desembolso que está ligado al aumento de la cantidad del producto puede interpretarse como un incremento del desembolso vinculado con la disminución de otro desembolso (negativo), o sea, con la sustitución de los mismos. De manera similar, el mismo hecho puede interpretarse como sustitución de los rendimientos, cuando el desembolso es considerado como un rendimiento negativo.

En lugar del segundo proceso ahora estamos examinando el proceso mixto, en el cual la cantidad del producto x_2, se obtiene por medio de que la cantidad: $\frac{x_1(x_3 - x_2)}{x_3 - x_1}$ se fabrica con ayuda del primer proceso, y la cantidad $\frac{x_3(x_2 - x_1)}{x_3 - x_1}$ se elabora mediante el tercer proceso. En suma, en el proceso mixto se fabrican

$$\frac{x_1(x_3 - x_2)}{x_3 - x_1} + \frac{x_3(x_2 - x_1)}{x_3 - x_1} = x_2.$$

El desembolso del factor en un proceso mixto de este tipo es

$$\bar{a}_{i2} x_2 = \frac{a_{i1} x_1 (x_3 - x_2) + a_{i3} x_3 (x_2 - x_1)}{x_3 - x_1},$$

donde $\bar{a}_{i2}$ representa el desembolso unitario.

Tenemos entonces

$$\frac{\bar{a}_{i2} x_2 - a_{i1} x_1}{x_2 - x_1} = \frac{a_{i3} x_3 - \bar{a}_{i2} x_2}{x_3 - x_2}$$

Puesto que por el principio se deduce que el segundo proceso es efectivo, por consiguiente, $a_{i2} < \bar{a}_{i2}$. Sustituyéndolo en la igualdad obtenida, encontramos que:

$$(3) \qquad \frac{a_{i2} x_2 - a_{i1} x_1}{x_2 - x_1} < \frac{a_{i3} x_3 - a_{i2} x_2}{x_3 - x_2}.$$

Como resultado se ve que, durante la transición consecutiva del primer proceso al segundo y del segundo al tercero, etc., el desembolso adicional del factor productivo, que corresponde a una unidad de incremento del producto, crece. Esta es la ley de los desembolsos adicionales crecientes. En vez del desembolso adicional que corresponde a una unidad de incremento del producto, podemos analizar su inverso. Esta inversión representa el incremento del producto que corresponde a una unidad del desembolso adicional, es decir, a la productividad del desembolso adicional. A los crecientes desembolsos adicionales les corresponde entonces la decreciente productividad de éstos. La ley de los crecientes des-

embolsos adicionales, por consiguiente, puede también formularse como la ley de la productividad decreciente de los desembolsos adicionales. Ambas formulaciones son equivalentes.

La ley de sustitución de los desembolsos —bajo ciertas condiciones en caso de la producción conjuntiva—, la ley de sustitución de los rendimientos, así como también la ley del creciente (y eventualmente decreciente) nivel de sustitución, y la ley de los crecientes desembolsos adicionales, que se presentan junto a los procesos técnicos divisibles están vinculadas a la selección de los procesos técnicos que se están realizando. En relación a la selección de los procesos técnicos efectivos, opera la ley de sustitución de los rendimientos. Empero, cuando los procesos técnicos son divisibles, en relación a esta selección, actúan también: la ley del creciente nivel de sustitución de los desembolsos y, en ciertas condiciones, la ley del nivel decreciente de sustitución de los rendimientos, así como también, la ley de los crecientes rendimientos adicionales. Estas leyes constituyen la confirmación de las regularidades praxeológicas que surgen de un cierto principio praxeológico de conducta, o sea, del principio de exclusión de los procesos técnicos infuncionales, así como también de los procesos técnicos equivalentes superfluos. Dichas leyes no constituyen, como con frecuencia se afirma erróneamente, leyes universales que rigen la técnica de la producción. La aceptación de este tipo de leyes universales de la técnica productiva, que supuestamente se presentan en cada uno de los procesos productivos, independientemente de la rama de producción y de la técnica propia de ésta, así como también independientemente del desarrollo social de las fuerzas productivas, constituye una generalización que sobrepasa el alcance de los hechos que pueden ser comprobados empíricamente y que rayan en una especulación metafísica [31].

[31] El punto de vista, que en la ley del creciente nivel de sustitución de los desembolsos (y eventualmente del nivel decreciente de sustitución de los rendimientos), así como también en la ley de los crecientes desembolsos adicionales, trata de ver una ley universal que rige las técnicas productivas, está ligado a la cuestión de la llamada ley del rendimiento decreciente, es decir, la ley de la decreciente productividad de los factores productivos. Dicha ley declara que las unidades adicionales del factor productivo aplicadas consecutivamente en el proceso productivo, cuando el desembolso de los demás factores es invariable, se distinguen por una productividad decreciente después de haber sobrepasado un cierto desembolso inicial. La ley del creciente nivel de sustitución de los desembolsos se considera como la conclusión de esta ley. Cuando existe una sustitución consecutiva de los factores —puesto que las unidades retiradas consecutivamente del factor sustituido tienen una productividad cada vez mayor— para su compensación son necesarias cada vez mayores cantidades subsecuentes del factor sustituyente. Además, las unidades sub-

Los procesos técnicos que corresponden a un nivel determinado del desarrollo histórico de las fuerzas productivas, así como también a una rama determinada de producción, son de los tipos más variados; unas hacen posible la sustitución de desembolsos de los factores productivos y de los productos; otros no ofrecen esta posibilidad, o la dan dentro de un campo solamente, y no en

secuentes del factor constituyente se distinguen por una productividad decreciente, lo que, por añadidura, provoca la necesidad de decrecientes desembolsos consecutivos del mismo factor. De una manera similar, en caso de producción conjuntiva, la productividad decreciente de los factores productivos hace que las unidades subsecuentes del factor, liberadas al disminuir la cantidad de un producto, causen el incremento decreciente del segundo producto. La ley de la decreciente productividad de los factores productivos no constituye, sin embargo, una condición necesaria y ni siquiera suficiente para la ley del creciente (o, relativamente, tratándose de los productos, decreciente) nivel de la sustitución. La condición necesaria la constituye sólo el hecho de que la productividad de las unidades subsecuentes del factor sustituyente crezca a un ritmo más lento que la productividad de las unidades retiradas consecutivamente del factor sustituido. Esta es una condición mucho más amplia que el cumplimiento de la ley de la productividad decreciente por ambos factores productivos. Finalmente, el cumplimiento de la ley de la productividad decreciente por los factores productivos no siempre es condición suficiente para asegurar un nivel creciente de sustitución de los factores. El resultado puede ser malogrado debido a la dependencia que existe entre la productividad de una unidad adicional de un factor del desembolso, respecto al segundo factor; es decir, puede suceder que la productividad de las unidades subsecuentes del factor sustituyente crezca, como resultado del crecimiento del desembolso del factor sustituido. Por otra parte, si la productividad de las unidades subsecuentes del factor sustituyente decrece considerablemente, como consecuencia del decrecimiento del desembolso del factor sustituido, el nivel de sustitución puede crecer aun sin que decrezca la productividad de las unidades subsecuentes del factor productivo particular. Resulta, por lo tanto, que la ley de la cuota creciente de sustitución de los desembolsos (así como también la ley del decrecimiento del nivel de sustitución de los rendimientos) y las llamadas leyes del rendimiento decreciente no se encubren mutuamente. Sobre esta cuestión ver el apéndice *Observaciones matemáticas,* párrafo 7. La confirmación de que el creciente (o decreciente) nivel de sustitución no se encubre con la llamada ley del rendimiento decreciente es importante por la razón de que esta supuesta ley, aceptada como una ley universal, empíricamente no es comprobable. Dicha ley, en un principio, había sido formulada para los desembolsos de trabajo y de los medios de producción, sólo en una extensión invariable del terreno en la agricultura. A. Turgot fue el primero en formular dicha ley *(Observation sur un memoire de G. de Saint Péravy,* París, 1768). Independientemente de A. Turgot, ésta fue formulada posteriormente por E. West *(Essay on the Aplication of Capital of Land,* Londres, 1815). Ricardo introdujo esta ley en su teoría de la renta del suelo, gracias a lo cual, ésta logró una gran divulgación. Un destacado químico, Justus Liebig, a mediados del siglo XIX, trató de otorgarle a la ley de la productividad decreciente de desembolsos del suelo una fundamentación biológica. E. A. Mitscherlich (1909) la dedujo de las investigaciones empíricas de la productividad de los desembolsos a abonar por la gleba. Marx, a diferencia de Ricardo, no vinculaba la renta del suelo con la llamada ley del decrecimiento del rendimiento de la tierra (ver *El Capital,* t. III, parte 2, capítulos 40-44); Lenin, a su vez, criticó dicha ley, considerándola como una abstracción que se encuentra en contradicción con la experiencia histórica, que no toma en cuenta el hecho de que el incremento de los desembolsos de los medios de produc-

los otros; al mismo tiempo, cuando es factible la sustitución, ésta puede realizarse de diversas maneras, en condiciones de un creciente, decreciente o constante nivel de sustitución; la diversidad de los procesos técnicos es enorme. No todos los procesos técnicos, sin embargo, encuentran la aplicación en la producción; se lleva a cabo una selección, la eliminación de los procesos funcionales y de los procesos equivalentes superfluos.

ción en un territorio dado, está por lo regular vinculado al progreso técnico. (Ver V. LENIN: *Kwestia agrarna a krytycy Marksa* [La cuestión agraria y los críticos de Marx], Obras t. 5, p.113.)

El fundador del sector norteamericano de la tendencia subjetivista en la economía política, J. B. Clark, amplió la ley del rendimiento decreciente a todos los factores productivos (*The Distribution Of Wealth*, Nueva York, 1899) y basó sobre ésta la teoría marginal del rendimiento de los factores productivos, otorgándole, por consiguiente, el carácter de una ley universal en cuanto a la técnica de la producción. En esta forma, la ley de la decreciente productividad de los factores productivos fue comúnmente aceptada dentro de la escuela neoclásica y dentro de las tendencias semejantes. En su forma más clara ésta fue formulada por P. H. Wicksteed (*The Common Sense of Political Economy*, Londres, 1902, ed. II, 1933, t. I) así como también por K. Wicksell (*Lectures of Political Economy*, primera edición, traducción del sueco, 1901, t. I). La concepción moderna de la ley de la decreciente productividad fue aportada por E. Schneider (*Theorie der Produktion*, Viena, 1934) y por S. Carlson (*A Study in the Pure Theory of Production*, Londres, 1939). No obstante, hay que señalar que el fundador de la escuela neoclásica, Alfred Marshall, en su análisis teórico, empleaba una gran reserva respecto a la ley universal de la decreciente productividad de los factores productivos. El consideraba que la sustitución de los factores productivos no es un fenómeno universal, sino que éste se presenta en un marco restringido. También limitaba la acción de la ley del rendimiento decreciente, principalmente dentro de la agricultura y en la producción de materias primas. Ver. A. MARSHALL: *Principles of Economics*, Londres, 1958, p. 318 y las siguientes, así como también la 387. La ley del decreciente rendimiento de los factores productivos no tiene una gran importancia tampoco en las teorías de la llamada escuela de Lausanne. L. Walras basó su teoría de la producción en la premisa de los coeficientes constantes de producción; en la elaboración de cada producto existe un proceso técnico únicamente, y no hay posibilidad alguna de sustitución de los factores productivos. Ver L. WALRAS: *Elements d'économie politique pure* (capítulo IV). Posteriormente, en la cuarta edición de su obra (1900), Walras había aumentado su análisis afirmando que sí existía la posibilidad de una sustitución general de los factores productivos, de acuerdo con la teoría de la productividad marginal (cap. VII). Por esto, consideraba la sustitución de los factores productivos como un caso particular, que no tiene significación universal. (Ver V. PARETO: *Manuel d'économie politique*, París, 1907.) La historia del problema está presentada por SCHUMPETER (*History of Economic Analysis*, Londres, 1954, pp. 1026-1053). El trabajo de un famoso matemático C. MENGER contiene un análisis crítico: *The Laws of return. A Study in Metaeconomics* (el trabajo conjunto en la redacción de O. MORGENSTERN: *Economic Activity Analysis*, Nueva York, 1954), así como también S. KRUSZCZYŃSKI: *Problem ksztaltowania sie przychodów i kosztów* (Problema de formación de los réditos y los costos); Pozen, 1962. Tal como lo había indicado en el texto, toda esta seudo-problemática, que raya casi en la metafísica, no es esencial para las relaciones cuantitativas que operan en el proceso productivo. La sustitución de los factores productivos y de los productos, así como también la creciente dificultad de ésta en el cambio consecutivo de los procesos técnicos, existen, porque éstas no surgen de la naturaleza de la técnica de producción, sino son resultado de selección de los procesos técnicos. Es ésta una cuestión de praxeología y no de tecnología.

Si existe más de un proceso técnico que haga posible la elaboración de un producto dado, los procesos técnicos alternativos permanecen después de la selección, sólo en caso de que el desembolso unitario aumentado sea compensado por la disminución de cualquier otro desembolso (o bien, que el rendimiento disminuido sea compensado por el incremento de cualquier otro rendimiento). Es decir, quedan únicamente los procesos que cumplen la ley de la sustitución. No obstante, cuando los procesos son divisibles, donde se puede cambiar libremente la dimensión de la producción sin modificar los desembolsos, la dificultad de sustitución constituye un criterio selectivo. Entre los procesos alternativos, ante todo, se elige el proceso en el cual la sustitución es más fácil; en seguida, el proceso en que ésta es un poco más difícil, después el proceso en que es más difícil aún, etc. De esa manera, la cuota de sustitución de los gastos crece (y la de sustitución de los rendimientos decrece) durante la sustitución consecutiva de un proceso al otro. El incremento de la dimensión de producción por medio de aumentar el desembolso de un factor se lleva a cabo de la manera siguiente: primero, se pasa al proceso en el cual el desembolso adicional del factor es el de más productividad; después, al proceso donde éste es menos productivo respectivamente; posteriormente, se pasa al proceso de menos rendimiento aún, etc. Por consiguiente, la selección de los procesos motiva el hecho de que los procesos remanentes, o sea, los procesos efectivos, cumplan con las leyes mencionadas de la sustitución, las cuotas de la sustitución y la productividad de los gastos adicionales.

La observación de los procesos técnicos aplicados en el proceso productivo puede causar la impresión de que dichas características están vinculadas a la naturaleza de la técnica de producción, puesto que en el proceso productivo, por lo general, no se encuentran procesos técnicos que no presentan las características citadas, éstos habían sido eliminados durante la supresión de los procesos infuncionales y de los procesos equivalentes superfluos. Este es el resultado de la aplicación del principio praxeológico de conducta en la producción [32].

[32] Z. BOSIAKOWSKI, en la reseña del trabajo de S. Kruszczynski, también toma en cuenta el carácter praxeológico de los resultados de las investigaciones empíricas en cuanto a las relaciones que ocurren entre el desembolso y el rendimiento. Ver *Ekonomista*, núm. 2/1963, pp. 428-432.

IV

En la forma arriba presentada, la matriz de la técnica de producción no ilustra plenamente las posibilidades técnicas de la producción, porque considera solamente los desembolsos unitarios que corresponden a los procesos técnicos respectivos. Los procesos técnicos se diferencian no sólo en relación a los desembolsos unitarios de los factores productivos, sino también en cuanto a la reserva del capital fijo, el cual se requiere en un proceso técnico respectivo. El capital fijo participa en el proceso productivo no sólo en forma de desembolsos, es decir, en forma de la usufructuación, durante un período de tiempo determinado. La usufructuación, como sabemos, tiene carácter de flujo, se mide por la cantidad de unidades naturales en un determinado lapso de tiempo; por ejemplo, horas-máquinas, horas-vagones, en transcurso de un mes o un año. El capital fijo participa en el proceso productivo también en su totalidad como reservas independientes de la dimensión de la usufructuación de éstos. Una máquina puede ser utilizada durante más o menos horas, y de acuerdo con esto fabrica una mayor o menor cantidad del producto. Por ejemplo, una máquina tejedora, según la cantidad de horas de su utilización, elabora mayor o menor cantidad de tela; un vagón puede ser usufructuado durante una cantidad de horas variable y conforme a eso puede efectuar una cantidad diferente de transporte (toneladas-kilómetros); de la misma manera, un edificio puede ser utilizado durante diferentes cantidades de horas y si en el edificio se lleva a cabo un determinado proceso productivo, la cantidad del producto depende de la cantidad de horas de utilización de éste. Sin embargo, no es posible elaborar ni una unidad del producto sin una máquina completa, ni sin un edificio completo; no se puede transportar ni una tonelada de carga ni siquiera por espacio de un kilómetro sin que se disponga de un vagón completo (aquí, por supuesto, omitimos la posibilidad de los medios de transporte suplentes). Lo toma en cuenta Marx: «Pero, aunque su fuerza vital disminuya, la máquina seguirá actuando en conjunto en el proceso de trabajo. Tenemos, pues, aquí un *factor del proceso de trabajo,* un medio de producción, que es *totalmente* absorbido *por el proceso de trabajo*» [33].

[33] C. MARX, *El Capital,* ed. cit., t. I, p. 154. En la misma página, Marx cita la siguiente observación respecto a una máquina tejedora de medias: «Una máquina hace muchos pares de medias, sin la existencia de esta máquina en su integridad no podría fabricarse ni un solo par»

El capital fijo conserva su forma natural y su valor de uso durante más de un período productivo. Por esta razón, éstos, una vez introducidos en el proceso productivo, participan en éste como una reserva indivisible. Una máquina, un automóvil, o un edificio pueden ser utilizados durante unas cuantas horas diarias solamente, pero no es posible prescindir de una máquina completa, de un automóvil completo, o de un edificio completo. La reserva del capital fijo, utilizado en el proceso productivo, comúnmente se define como *equipo técnico de producción*. Al efectuar una característica completa de las condiciones en las que se lleva a cabo la producción, junto a los desembolsos unitarios de los factores productivos, es necesario mencionar también el equipo técnico, o sea, la reserva del capital fijo. Los procesos técnicos correspondientes se diferencian también en cuanto a un equipo técnico requerido.

A cada uno de los procesos técnicos le corresponde, como regla, una reserva determinada de diversos capitales fijos —edificios, instalaciones, máquinas, medios de transporte, etc.—, necesarios para la aplicación de un proceso técnico dado, o sea, el equipamiento técnico requerido. Durante la elaboración de acero con ayuda de un proceso técnico determinado, los hornos tienen que tener una capacidad determinada, la resistencia a la temperatura, el grosor de las paredes, es necesaria también una cantidad y una capacidad determinadas de recipientes para el transporte de acero crudo, una determinada dimensión del edificio, etc. La alteración de dichas magnitudes se une a la modificación del proceso técnico. De una manera similar, en un proceso técnico respectivo de procesamiento de petróleo, son necesarias las cantidades y dimensiones adecuadas de instalaciones, tanques, cañerías, cisternas, dispositivos de calefacción y enfriamiento, etc., así como también un terreno de dimensiones correspondientes. La variedad, la cantidad y la dimensión de estas instalaciones depende del proceso técnico aplicado. Los diversos métodos de fabricación de ácido sulfúrico o de aluminio requieren diferentes dispositivos, maquinarias e instalaciones. Las diversas maneras de procesamiento de metal exigen una maquinaria diferente (por ejemplo, todo tipo de fresadoras), una potencia y capacidad distintas de las máquinas. Los diversos procesos técnicos que sirven para la elaboración de un producto dado requieren, por consiguiente, un distinto, pero siempre determinado equipo técnico. La magnitud del equipamiento técnico, o sea, la reserva del capital fijo necesario, es independiente de las dimensiones de su utilización, y por lo mismo, también de la

cantidad del producto fabricado. Esta constituye una magnitud constante, determinada para un proceso técnico dado.

Para obtener un cuadro completo de posibilidades técnicas de la producción debe introducirse a la matriz de la técnica productiva el equipo técnico que corresponda a los procesos técnicos respectivos. Con ese fin, es necesario entre los medios de producción efectuar una diferenciación del capital fijo y el circulante. Designemos —para la distinción— el desembolso del capital circulante con $\mathbf{Q}^{(0)}$, y el del capital fijo con $\mathbf{Q}^{(1)}$, además, supongamos que $\mathbf{S}$ representa la reserva del capital fijo. Entonces, la matriz de la técnica productiva puede escribirse en forma de tabla

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathbf{L}_1}{P} & \frac{\mathbf{L}_2}{P} & \cdots & \frac{\mathbf{L}_r}{P} \\ \frac{\mathbf{Q}_1^{(0)}}{P} & \frac{\mathbf{Q}_2^{(0)}}{P} & \cdots & \frac{\mathbf{Q}_r^{(0)}}{P} \\ \frac{\mathbf{Q}_1^{(1)}}{P} & \frac{\mathbf{Q}_2^{(1)}}{P} & \cdots & \frac{\mathbf{Q}_r^{(1)}}{P} \\ \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 & \cdots & \mathbf{S}_r \end{bmatrix}.$$

En esta tabla cada columna representa un conjunto (vector) de desembolsos unitarios y del equipo técnico, que corresponde a un proceso técnico dado. El equipo técnico (la reserva del capital fijo) se ve en la parte inferior de la columna; el último verso horizontal de la matriz ilustra, por lo tanto, el equipo técnico que corresponde a los procesos técnicos respectivos [34]. Dicha tabla la denominaremos *matriz completa de la técnica de producción.*

Tomando en consideración el equipo técnico, puede también ampliarse el concepto de los procesos técnicos y los infuncionales equivalentes superfluos. Un proceso técnico es infuncional cuando

[34] El equipo técnico constituye un conjunto (vector), cuyos componentes son las reservas de un respectivo capital fijo. Digamos que para un proceso técnico dado, el vector que representa el equipo técnico puede escribirse en forma

$$\mathbf{S}_j = \begin{bmatrix} S_{1j} \\ S_{2j} \\ \vdots \\ S_{lj} \end{bmatrix}.$$

En este caso j constituye un índice del proceso técnico, o sea, $j = 1, 2, \ldots, r$.

requiere un mayor desembolso unitario de uno o más factores productivos, o bien, de un elemento o de varios elementos del equipamiento técnico [35], y que, al mismo tiempo, ningún otro desembolso unitario *ni otro elemento alguno* del equipamiento no sea menor. Los procesos técnicos son equivalentes si los desembolsos unitarios, así como también los elementos del equipo técnico correspondientes a éstos tienen una magnitud igual. Al eliminar los procesos técnicos infuncionales y los procesos y equivalentes superfluos obtenemos un concepto ampliado de los procesos técnicos efectivos. Por medio de un razonamiento similar al del arriba efectuado puede demostrarse que los procesos técnicos (en el sentido ampliado) efectivos cumplen con la ley de la sustitución.

Por esta razón, la sustitución puede realizarse entre los desembolsos unitarios respectivos, entre los elementos del equipo técnico correspondientes, o finalmente, entre los elementos del equipo técnico y los desembolsos unitarios. Una atención especial merece el último tipo de sustitución. Según la ley de sustitución, la sustitución tiene que abarcar por lo menos dos magnitudes. Por consiguiente, si la sustitución de los desembolsos y la sustitución de los elementos del equipo técnico no se realizan, entonces tiene que efectuarse la sustitución entre, por lo menos, un desembolso unitario y al menos un elemento de equipo técnico. Este hecho corresponde a la experiencia general, que el incremento del equipo técnico va a la par con la disminución de los llamados gastos de explotación, o sea, los desembolsos unitarios de los factores productivos. Sin embargo, este hecho no dimana de «la naturaleza» de la técnica de producción, como muchas personas piensan equivocadamente, sino que es resultado de la selección que elimina los procesos técnicos infuncionales, así como también los procesos equivalentes superfluos. Si un determinado proceso técnico requiere una magnitud mayor de uno o varios elementos del equipo técnico, y no se vincula a la disminución de ningún desembolso unitario, es decir, a la disminución de los llamados gastos de explotación, el proceso de este tipo no se aplica en el proceso productivo, puesto que es infuncional. La regularidad comprobada en la práctica, de que a un equipo técnico mayor le corresponden los gastos de explotación menores (viceversa), no constituye ninguna misteriosa propiedad «natural» de la técnica de producción. Esta es

[35] Estos elementos constituyen los componentes del vector del equipo técnico S, el cual corresponde a un proceso técnico dado. Por consiguiente, éstos constituyen las máquinas concretas, los edificios, las instalaciones, etc.

simplemente una regularidad praxeológica, el resultado de una determinada selección de los procesos técnicos.

Como ya hemos visto, Marx observó que la disminución de los gastos unitarios del trabajo, o sea, el incremento de la productividad de éste, por lo general se vincula al aumento del equipo técnico del proceso productivo. La sustitución del trabajo vivo mediante el creciente equipo técnico constituye la palanca principal en el proceso histórico del incremento de la productividad del trabajo humano. Ésta generalmente va unida a la sustitución de los gastos unitarios del trabajo, por medio de los gastos unitarios de los medios de producción, especialmente de los medios rotativos de circulación, por la razón de que el incremento de la producción logrado por una unidad del gasto del trabajo requiere que aumente la cantidad de los objetos de trabajo transformados en producto [36].

El equipo técnico propio para un proceso técnico dado indica el desembolso máximo, es decir, la dimensión máxima de utilización del capital fijo. El desembolso de un capital fijo tiene que estar dentro de los límites de la continua utilización del mismo en el proceso productivo, o sea, un capital fijo no puede ser utilizado más de veinticuatro horas al día. Cuando existe la reserva de 10 máquinas, la utilización no puede sobrepasar doscientas cuarenta horas-máquina por día, cuando hay en existencia cinco automóviles, la utilización no puede sobrepasar ciento veinte horas-automóviles por día, etc. Frecuentemente, la utilización de un capital fijo no puede ser continua, puesto que es necesario suspender de vez en cuando el ciclo de trabajo para la revisión y el control de éste, para su conservación, reparación y restauración. Una parte de estas suspensiones, como la revisión y la conservación, está estrictamente determinada por las condiciones técnicas, y el hecho de dejar de aplicar estas medidas conduce a que el capital fijo pierda su valor de uso. Otras suspensiones provisionales, necesarias para efectuar reparaciones, tienen un carácter fortuito, no obstante, ba-

[36] Ver la nota anterior 23, del texto citado dimana que Marx vinculaba el incremento de la productividad del trabajo, tanto a la sustitución de los desembolsos unitarios por medio del equipo técnico, «la masa de maquinaria puesta en movimiento, de ganado de labor, de abonos minerales, de tubos de drenaje,etc., es *condición* de aquella productividad creciente. Y lo mismo la masa de los medios de producción concentrados en los edificios, altos hornos, medios de transporte, etc», como también a la sustitución de los desembolsos unitarios de los medios de producción, sobre todo en lo que se refiere al capital circulante («se elabora más materia prima durante el mismo tiempo»). Deben diferenciarse dos tipos de sustitución que están vinculados al incremento de la productividad del trabajo. Por falta de una diferenciación exacta surgió una gran confusión en la literatura económica.

sándose en la experiencia es posible determinar la duración media de ellas. De esa manera, a un determinado capital fijo le corresponde un tiempo máximo de utilización en transcurso de un determinado lapso de tiempo (un día, un mes, un año). Cuando existe una determinada reserva de un capital fijo dado no se puede rebasar una cierta dimensión en la utilización de dicha reserva, es decir, un determinado desembolso máximo.

Como resultado, a cada uno de los procesos técnicos le corresponde una cierta cantidad del producto (la dimensión de la producción), que puede obtenerse (en el transcurso de un período dado) aplicando un proceso respectivo. Dicha cantidad está indicada por la máxima utilización del equipo técnico, característico para el proceso técnico dado; la denominamos *potencia productiva* de un determinado proceso técnico. Cada proceso técnico posee, por consiguiente, una potencia productiva propia. Si la dimensión de la producción es menor que la potencia productiva del proceso, decimos que la potencia productiva no es plenamente aprovechada. La relación que existe entre la dimensión efectiva de la producción y la potencia productiva del proceso técnico la denominamos *grado de aprovechamiento* de la potencia productiva. Frecuentemente expresamos esta relación en forma de porcentaje y decimos que la potencia productiva es aprovechada en un 70 %, 90 %, etc. El grado máximo de aprovechamiento es desde luego el 100 %. Un aprovechamiento incompleto de la potencia productiva puede ser resultado de que la reserva de los medios de producción no está utilizada durante todo su tiempo máximo de utilización, o bien porque no toda la reserva (es decir, no todo el capital fijo) es utilizada. El primer caso tiene lugar cuando, por ejemplo, los edificios y las máquinas son utilizados solamente durante un cierto tiempo de las veinticuatro horas, digamos ocho horas, por la razón de que el establecimiento productivo trabaja sólo un turno. Otro caso se presenta cuando una parte de maquinaria (y eventualmente de edificios) no funciona, por ejemplo, por falta de materia prima, o bien porque los motores trabajan sólo con una carga parcial de funcionamiento [37]. En ambos casos la reserva del capital fijo de produc-

[37] En relación a eso se habla sobre el grado extensivo e intensivo de aprovechamiento de la potencia productiva. El primero se refiere al tiempo de utilización del equipo técnico, y el segundo a la fracción de la reserva que es utilizada. Ver A. GOZULOW, *Statystyka ekonomiczna* (Estadística económica), Varsovia, 1956, pp. 138-139.

ción (o sea, el equipo técnico) no es utilizada en su máxima dimensión [38].

Puede darse el caso de que las reservas y el tiempo mínimo de utilización de los respectivos capitales fijos sean de tal tipo, que cada uno de éstos permita fabricar la misma cantidad del producto. Decimos entonces que el equipo técnico tiene una *estructura armónica.* No obstante, frecuentemente, los elementos respectivos del equipo técnico permiten elaborar diversas cantidades del producto. Hablamos entonces de la *estructura disarmónica* del equipo técnico. Cuando la estructura del equipo técnico es disarmónica, la potencia productiva del proceso técnico está determinada por aquel elemento del equipo técnico que, en comparación con los demás elementos, permite obtener una menor cantidad del producto; a dicho elemento lo denominamos *elemento limitante.* Los elementos restantes del equipo técnico no son utilizados en la dimensión máxima posible, sino que son desaprovechados en parte.

La estructura del equipo técnico puede ser armónica o disarmónica de acuerdo con una técnica productiva dada; dicha estructura constituye una característica de un determinado proceso técnico. Los procesos técnicos correspondientes pueden, por consiguiente, vincularse a un desaprovechamiento parcial de ciertos elementos del equipo técnico, aun cuando la potencia productiva es aprovechada plenamente. Una estructura disarmónica del equipo técnico puede, sin embargo, ser convertida en una estructura más armónica mediante cierto acoplamiento adecuado de los procesos técnicos. Supongamos que tenemos dos procesos técnicos, en los cuales son utilizados los

[38] Además de la dimensión máxima, también puede existir una dimensión mínima de utilización del capital fijo de producción. La utilización puede ser indivisible, lo que quiere decir que la dimensión de ésta no puede ser, por razones técnicas, menor que un cierto límite inferior. Por ejemplo, un motor con la potencia de 100 km no puede trabajar si su carga de funcionamiento es solamente de 10 km; un alto horno no puede funcionar durante un lapso de tiempo breve sino que tiene que ser utilizado continuamente en el curso de todo un período de la llamada campaña del horno, la cual dura varios años. Por consiguiente, el horno necesita tener cierta capacidad y, por lo tanto, no puede fundirse en él una cantidad de mineral de hierro inferior a la que se suele fijar para una jornada. Por esta razón, algunos hablan de la «potencia productiva mínima» del proceso técnico, a diferencia de la «potencia máxima» arriba mencionada. Ver, por ejemplo, E. GUTENBERG, *Grundlagen der Betriebwirtschaftslehre,* Berlín, 1957, t. I, pp. 56-57. Sin embargo, la llamada potencia productiva mínima generalmente no está determinada con exactitud. Lo toma en cuenta el mismo Gutenberg: «El concepto de potencia mínima no tiene, sin embargo, una definición técnica tan precisa como lo tiene el concepto de potencia máxima» (ídem, p. 58). Por consiguiente, usamos el término «potencia productiva» con el significado de la dimensión máxima de la producción, hablando —dado el caso— sobre un aprovechamiento mínimo de esta potencia.

capitales fijos iguales. Digamos que en el primer proceso existen tres elementos del equipo técnico que permiten la fabricación (en un período de tiempo dado) de 100, 120, 150 unidades del producto, respectivamente. Aquí el primero es un elemento limitante, y los otros dos no son aprovechados plenamente. En el segundo proceso, supongamos que los mismos elementos, en cuanto a la técnica, permiten la elaboración de 200, 180 y 150 unidades del producto respectivamente, o sea, que el tercer elemento del equipo técnico es elemento limitante, y el primero y segundo elementos no son aprovechados plenamente. Unificando ambos procesos obtenemos un proceso mixto, en el cual se fabrican 300 unidades del producto, siendo, al mismo tiempo, aprovechados totalmente todos los elementos del equipo técnico. La estructura de equipo técnico en este proceso mixto es armónica. Dicha unificación de los procesos técnicos la llamaremos *armonización* de la estructura del equipo técnico.

La armonización del equipo técnico por medio de la unificación de los procesos técnicos es, por consiguiente, posible en los casos en que los diversos procesos técnicos emplean los mismos capitales fijos en cuanto a la técnica, y en aquellos otros en que los elementos del equipo técnico constituyen en unos procesos un componente limitante, mientras que en otro son parcialmente desaprovechados. La unificación de los procesos técnicos conduce, entonces, a la disminución de la disarmonía de la estructura del equipo técnico, pero no siempre a una armonización total de ésta, puesto que el desaprovechamiento de los elementos respectivos del equipo técnico existe en los diferentes procesos y no siempre puede ser eliminado al unificar estos procesos. Sin embargo, una armonización total siempre puede lograrse mediante la *repetición múltiple* del proceso técnico, es decir, por medio de elevar las dimensiones de la producción a la repetición múltiple de la cantidad del producto que pueda alcanzar los elementos correspondientes del equipamiento técnico. Cuando existe un aumento de este tipo de dimensión de la producción, no todos los elementos del equipo técnico deben ser repetidos de manera múltiple en la misma proporción. Por ejemplo, si en uno de los procesos antes mencionados, la dimensión de la producción fuese aumentada seis veces, es decir, hasta las 600 unidades del producto, el primer elemento del equipo técnico tendría que ser aumentado seis veces, el segundo cinco veces y el tercero cuatro veces solamente. Entonces, cada elemento permitiría la fabricación de 600 unidades del producto, y la estructura del equipo técnico se armonizaría plenamente de la misma manera; en el segundo proceso citado como ejemplo, la

armonización de la estructura del equipo técnico puede lograrse cuando la dimensión de la producción sea igual a 1 800 unidades, entonces el primer elemento del equipamiento técnico debe ser repetido nueve veces, el segundo diez veces y el tercero doce veces. Cualquier dimensión de la producción que constituya una repetición múltiple de la cantidad del producto, la cual ha sido posible lograr debido a los elementos respectivos del equipo técnico, conduce a la armonización de la estructura de éste; para eso es suficiente la menor repetición múltiple.

La menor repetición múltiple determina la menor dimensión de la producción (y por lo tanto la potencia productiva del proceso repetido de manera múltiple), y en ella se realiza la armonización de la estructura del equipo técnico. Por consiguiente, resulta que, gracias a la unificación adecuada de los procesos técnicos, puede disminuirse la falta de armonía, y mediante la repetición múltiple del proceso técnico se puede lograr una armonización total del equipo técnico. Ambos métodos pueden unirse para obtener una amortización total cuando existe la menor posible dimensión de la producción [39].

La armonización de la estructura del equipo técnico siempre está vinculada al incremento de la potencia productiva.

Cuando existe la armonización debida a la unificación de los procesos técnicos, la potencia productiva del nuevo proceso mixto es igual a la menor de las cantidades del producto, cuya obtención la permiten los elementos respectivos del equipo técnico.

Después de una repetición múltiple del proceso técnico, la potencia de éste es igual a la repetición de aquella cantidad del producto que se puede lograr gracias a los respectivos elementos del equipo técnico, la cual, por lo tanto, es mayor de la cantidad de producto que permite elaborar el elemento limitante, y que determina la potencia productiva del proceso antes de haber sido éste repetido de una manera múltiple. Frecuentemente, la armonización

[39] Ver el apéndice: *Observaciones matemáticas,* párrafo 3. La cuestión de la armonía del equipo técnico la tomó en cuenta el ingeniero economista danés IVAR JANTZEN en su trabajo *Voxende Udbytte Industrien* («Nationalökonomisk Tidskrift», Copenhague, 1924, t. 62. La traducción inglesa se encuentra en el libro del mismo autor: *Basic Principles of Business Economics,* Copenhague, 1939. La traducción alemana se encuentra como suplemento en el libro de E. SCHNEIDER, *Theorie der Produktion,* (ed. cit.). Ver también IVAR JANTZEN, *Laws of Production and Cost,* «Econometrica», t. 17, Supplement, 1949 (Report on Washington Meeting). Hasta donde sabemos, Jantzen fue el primero en afirmar que mediante la repetición múltiple de la dimensión de la producción puede lograrse la armonización de la estructura del equipo técnico. Esta hipótesis la definió como *La Ley de la Armonía* (Law of Harmony). Ver F. ZEUTHEN, *Economic Theory and Method.* Londres, 1955, pp. 117-118.

de la estructura del equipo técnico puede lograrse a través de la unificación de los procesos técnicos que fabrican los diversos productos, si es que estos productos emplean (de una manera total o parcial) los capitales fijos iguales en cuanto a la técnica. La producción conjuntiva de dos o más productos constituye entonces el resultado. Muy frecuentemente la producción conjuntiva es resultado de la unificación de los diferentes procesos técnicos con el objeto de armonizar la estructura del equipo técnico.

Es evidente que la armonización de la estructura del equipo técnico, ya sea mediante el incremento de la cantidad del producto respectivo (como consecuencia de la unificación o una repetición múltiple de los procesos), ya sea por medio de la transición a la producción conjuntiva (o también mediante el incremento de cantidad y de variedad de los productos), requiere un aumento de equipo técnico. Por consiguiente, ésta se vincula tanto con el aumento del equipo técnico como con la potencia productiva del establecimiento productivo, o sea —como se dice comúnmente— «con el tamaño» del establecimiento [40].

La armonización requiere eventualmente la unificación de un número mayor de establecimientos productivos en un establecimiento nuevo y «más grande», que tenga un equipo técnico mayor y una mayor potencia productiva (o una potencia productiva más diversificada en caso de transición a la producción conjuntiva, o bien al aumentar la diversificación de ésta). Puede ocurrir, además, que la armonización del equipo técnico en una rama de producción dependa del incremento de la producción en otra rama. Dicha dependencia puede ser resultado del hecho de que el incremento de producción en la otra rama constituya la condición necesaria para el aprovechamiento de la potencia productiva aumentada, que surgiría como resultado de la armonización del equipo técnico. Esto puede dimanar del hecho de que la segunda rama de producción suministra materias primas, o bien que ésta se convierta en consumidor del producto elaborado [41].

La consideración al equipamiento técnico en gran medida limita

[40] La armonización del equipo técnico constituye la base técnica de la ley de concentración de la producción, la cual se presenta tanto en condiciones del modo de producción capitalista como socialista. Esta también se vincula al fenómeno llamado *increasing returns of scale,* o bien *economies of scale* (es decir, utilidades logradas mediante el aumento de escala en la producción).

[41] Esto constituye la base del fenómeno definido por Marshall como *external economies* («utilidades externas»). Ver A. MARSHALL, *Principles of Economics,* ed. cit., p. 226.

el campo de acción de la cuota creciente de sustitución de los desembolsos (y la cuota decreciente de sustitución de los rendimientos), así como también de la ley de los crecientes desembolsos adicionales. Estas leyes, como sabemos, son resultado de la aplicación en el proceso productivo del principio praxeológico referente a la eliminación de los procesos infuncionales. Los procesos que dejan de cumplir dichas leyes son infuncionales cuando son mixtos y puesto que entonces existen uno o más procesos mixtos que dan el mismo resultado productivo con un desembolso menor, por lo menos de un factor productivo. En cambio, el equipo técnico indica una potencia productiva determinada para los procesos técnicos respectivos. Como consecuencia, la unificación de dos o más procesos con el fin de fabricar una cantidad dada del producto puede conducir al desaprovechamiento de la fuerza productiva de estos procesos, o bien a una disarmonía en la estructura del equipo técnico de los mismos. En estas condiciones, los procesos técnicos son indivisibles y la aplicación de los procesos mixtos no viene al caso. Los procesos mixtos no «compiten» por su aplicación. En resultado, los procesos que no cumplen con las leyes citadas respecto a la cuota de la sustitución y de los desembolsos adicionales no tienen que ser necesariamente infuncionales.

En dicha situación estas leyes no aparecen; pueden presentarse sólo en un caso particular, cuando el equipo técnico y la potencia productiva de los procesos de los cuales se compone el proceso mixto son relativamente pequeños. Entonces los procesos son más o menos divisibles y el proceso mixto no causa ni el desaprovechamiento de la potencia productiva, ni la disarmonía de la estructura del equipo técnico. Por esta razón, dichas leyes se manifiestan solamente en las ramas de producción en las cuales el equipo técnico y la potencia productiva de los procesos técnicos son relativamente pequeños. En contraste, estas leyes dejan de aparecer a medida que aumenta el equipo técnico y la potencia productiva, así como también el incremento del «tamaño» de los establecimientos productivos vinculado con esto [42].

[42] De ahí resulta que estas leyes —como regla praxeológica— se presentan principalmente en la producción agrícola y en algunos tipos de producción de las materias primas, donde el equipo técnico es relativamente pequeño; en cambio, no se manifiestan en la producción industrial que se distingue por una dimensión mayor del equipo técnico. Esto coincide con las observaciones empíricas confirmadas por A. MARSHALL (*Principles of Economies*, ed. cit., pp. 318-319 y 137-154). No obstante, a medida que crece como resultado del progreso técnico la dimensión del equipo técnico en la agricultura y en la producción extractiva, también en estos

La ley del creciente nivel de sustitución de los gastos (y eventualmente del nivel decreciente de sustitución de los ingresos) y la ley de los crecientes gastos adicionales no constituye por consiguiente un principio universal para la selección de los procesos técnicos.

V

La selección de los procesos técnicos considerada aquí se limita, por consiguiente, a la selección de los procesos efectivos. En una situación determinada y hasta cierto punto singular, en la que el equipo técnico no desempeña un papel de mayor importancia, la selección conduce a una elección de los procesos que cumplen con la ley de la creciente (o decreciente cuota de sustitución y de los crecientes desembolsos adicionales). Después de la selección, como regla, queda más de un proceso técnico con cuya ayuda es posible elaborar un producto determinado (o un conjunto de éstos). Existe también la posibilidad de aplicar los procesos mixtos que, sin embargo, puede ser limitada, tomando en cuenta la potencia productiva y la armonía de la estructura del equipo técnico. No es posible llevar a cabo una ulterior selección de los procesos técnicos empleando exclusivamente el cálculo efectuado en unidades naturales. Para esto hacen falta los criterios.

En la práctica de la economía natural se establece —por medio de la experiencia colectiva adquirida en el proceso social del trabajo— la aplicación de los determinados procesos técnicos (puros y mixtos) durante la fabricación de los productos respectivos. Esto se realiza a través de un largo proceso espontáneo de «ensayos y errores», el cual conduce a un cierto tipo de «selección natural» de los procesos técnicos. El resultado de este tipo de selección se afirma como una costumbre y se transmite mediante la tradición [43].

El proceso selectivo no obedece a un criterio único. Éste se lleva a cabo de una manera espontánea en las condiciones de concatenación recíproca de los métodos de conducta de las costumbres

campos dejan de presentarse dichas leyes. Este hecho esclarece los resultados empíricos obtenidos por Lenin respecto a la llamada ley de la decreciente renta del suelo dentro del marco del desarrollo capitalista de la agricultura (ver V. LENIN, *Cuestión agraria y los críticos de Marx*, «Obras», t. 5, pp. 112-125. L. KRZYWICKI, *Kwestia rolna* (Cuestión agraria), «Obras», t. 8, Varsovia, 1967, pp. 166-167), en relación a eso señalaba claramente la importancia del implemento técnico en la agricultura.

[43] Ver O. LANGE, *Economía Política*, t. I, ed. cast. cit., pp. 136-139.

y las tradiciones y también dentro de una lenta acumulación de cambios que se operan en las fuerzas productivas sociales, es decir, en los métodos técnicos de la producción, en los medios de producción y en la facultad que posee el hombre de utilizar estos medios (como también en el número de personas que tienen esta capacidad).

Por consiguiente, en las reflexiones ulteriores aceptaremos, de momento, que la elaboración de cualquier producto se efectúa al aplicar un determinado proceso técnico que ha sido realizado por medio del proceso de selección descrito y consagrado mediante la costumbre y la tradición. Solamente el análisis de la economía mercantil pecuniaria nos aportará un criterio univalente para la selección de los procesos técnicos en forma de cálculo de tipo «valor-dinero» y los principios para llevar a cabo una economía racional.

APÉNDICE

OBSERVACIONES MATEMÁTICAS

§ 1. *La matriz de la técnica de producción.*—Como en el texto, la designamos por medio de

$$\mathbf{L}_j = \begin{bmatrix} L_{1j} \\ L_{2j} \\ \vdots \\ L_{hj} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_j^{(0)} = \begin{bmatrix} Q_{1j}^{(0)} \\ Q_{2j}^{(0)} \\ \vdots \\ Q_{kj}^{(0)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_j^{(1)} = \begin{bmatrix} Q_{1j}^{(1)} \\ Q_{2j}^{(1)} \\ \vdots \\ Q_{lj}^{(1)} \end{bmatrix},$$

donde $j = 1, 2, \ldots, r$, los vectores de las inversiones del trabajo, los desembolsos (desgaste) del capital circulante y los (utilización) del capital fijo en el proceso técnico j. El número de los tipos respectivos de trabajo es igual a h, el número de un correspondiente capital circulante es igual a k, el número del respectivo capital individual es igual a l. Examinamos dos procesos técnicos posibles r. Con la letra P designamos la cantidad del producto obtenido (el rendimiento). Los desembolsos y los productos se miden en unidades naturales durante un período de tiempo dado (éstos constituyen flujos o corrientes). Aceptamos que los desembolsos constituyen magnitudes no negativas (donde, al mismo tiempo, por lo menos, algunas de éstas son positivas), y el producto constituye una magnitud positiva.

Los vectores citados forman *la matriz de los desembolsos.*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 & \ldots & \mathbf{L}_r \\ \mathbf{Q}_1^{(0)} & \mathbf{Q}_2^{(0)} & \ldots & \mathbf{Q}_r^{(0)} \\ \mathbf{Q}_1^{(1)} & \mathbf{Q}_2^{(1)} & \ldots & \mathbf{Q}_r^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Esta matriz también puede escribirse en forma desarrollada, lo que hace resaltar los componentes de los vectores respectivos.

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1r} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{h1} & L_{h2} & \dots & L_{hr} \\ Q_{11}^{(0)} & Q_{12}^{(0)} & \dots & Q_{1r}^{(0)} \\ Q_{21}^{(0)} & Q_{22}^{(0)} & \dots & Q_{2r}^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{k1}^{(0)} & Q_{k2}^{(0)} & \dots & Q_{kr}^{(0)} \\ Q_{11}^{(1)} & Q_{12}^{(1)} & \dots & Q_{1r}^{(1)} \\ Q_{21}^{(1)} & Q_{22}^{(1)} & \dots & Q_{2r}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{l1}^{(1)} & Q_{l2}^{(1)} & \dots & Q_{lr}^{(1)} \end{bmatrix}$$

En esta matriz las columnas indican desembolsos de los factores productivos correspondientes durante un proceso técnico dado, y los renglones horizontales, en cambio, señalan los desembolsos de un factor productivo dado durante los diversos procesos técnicos. Al escribir $n = h + k + l$ comprobamos que la matriz de los desembolsos (en su forma desarrollada) contiene n renglones horizontales y r número de columnas.

Para simplificar designamos los elementos de la forma desarrollada de la matriz de los desembolsos con X_{ij}, o sea, X_{ij} es un elemento que se encuentra en la intersección del renglón i con la columna j ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, r$). Entonces la matriz de los desembolsos toma la forma de

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1r} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nr} \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

El gasto unitario del factor productivo i en el proceso técnico j lo determinamos como

$$a_{ij} = \frac{X_{ij}}{P} \quad (i = 1, 2, \dots, n;\ j = 1, 2, \dots, r). \tag{1.2}$$

Los gastos unitarios los denominamos también *coeficientes de producción*. Los coeficientes de producción tienen una dimensión

independiente del tiempo, es decir, la dimensión de la relación que existe entre dos reservas.

Los coeficientes de producción forman la *matriz de la técnica productiva.*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nr} \end{bmatrix}.$$

Las columnas de esta matriz representan desembolsos unitarios de los factores productivos respectivos durante un proceso técnico dado; en cambio, los versos horizontales representan el desembolso unitario de un factor productivo dado durante diversos procesos técnicos.

Las reservas de un respectivo capital fijo requeridas en el proceso técnico j constituyen un vector que designamos mediante

$$\mathbf{S}_j = \begin{bmatrix} S_{1j} \\ S_{2j} \\ \vdots \\ S_{lj} \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, r).$$

Dicho vector lo denominamos *vector de equipo técnico* de un proceso dado. Las magnitudes $S_{1j}, S_{2j}, \dots, S_{lj}$, son no negativas y constituyen componentes del equipo técnico. Las reservas tienen una dimensión independiente del tiempo. Los equipos técnicos forman matriz con l renglones y r columnas. Esta matriz la designaremos por medio de **S.**

Al introducir a la matriz de la técnica productiva el equipo técnico que corresponde a los procesos técnicos respectivos, obtenemos la *matriz completa de la técnica productiva:*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nr} \\ S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1r} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{l1} & S_{l1} & \dots & S_{lr} \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

o, de una manera más breve,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_r \\ \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 & \dots & \mathbf{S}_r \end{bmatrix}, \tag{1.4a}$$

donde

$$\mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, r).$$

En una matriz completa de técnica productiva las columnas representan desembolsos unitarios, *así como también* el equipo técnico durante un proceso técnico dado; en cambio, las líneas horizontales designan un desembolso unitario de un factor productivo dado, *o bien,* una reserva del capital fijo durante diversos procesos técnicos.

§ 2. *Producción conjuntiva.*—La producción conjuntiva se puede incluir en la matriz de la técnica de producción, tomando en consideración solamente uno de todos los productos conjuntivos como producto de referencia. Los productos restantes los consideramos entonces como factores productivos *sui generis,* cuyos desembolsos tienen un valor negativo. Los desembolsos unitarios negativos de estos «factores productivos» expresan la cantidad de productos respectivos obtenidos en un proceso técnico dado, que corresponden a una unidad del producto de referencia [1].

Otra manera de incluir la producción conjuntiva en la matriz de la técnica de producción consiste en el hecho de que todos los productos se designan por medio de los números positivos, y los desembolsos de los factores productivos se designan mediante los números negativos (estos desembolsos son hasta cierto punto negativos). Esto permite colocar todos los productos y los desembolsos en la matriz de la técnica productiva. Tomando en consideración la regla convencional de símbolos, dicha matriz adquiere entonces el carácter de una tabla de balances en la cual los productos constituyen magnitudes positivas, y los desembolsos, magnitudes negativas [2]. Este tipo de conducta tiene unas cualidades indiscutibles. No

[1] Ver O. LANGE, *Optymale decyzje,* Varsovia, 1964. [Traducción castellana citada.]

[2] Un ejemplo de este tipo de matrices que cumplen las funciones de tablas de balance presenta P. PICHLER, *Anwendung der Matrizenrechnung bei Betriebskostenüberwachnung,* en la publicación colectiva *Anwendung der Matrizenrechnung auf wirtschaftliche und statistische Probleme,* Würzburg, 1959, y también el trabajo colectivo *Matematicheskiye metody planirovania proizvodstva,* en la redacción de M. Fiodorovich, Moscú, 1961.

los aplicamos, porque para alcanzar nuestros objetivos es más conveniente expresar desembolsos de los factores productivos con la ayuda de números positivos. Los elementos (las componentes) del equipo técnico también los expresamos por medio de números positivos.

§ 3. *Potencia productiva y estructura del equipo técnico.*—S_{ij} constituye la reserva del capital fijo i en el proceso técnico j. Mediante t_{ij} designamos el tiempo máximo de utilización de éste en el curso de un período de tiempo dado. El desembolso máximo posible de este capital durante un lapso de tiempo dado es igual a

$$(X_{ij})_{\max} = t_{ij} S_{ij} \quad (i = 1, 2, ..., l;\ j = 1, 2, ..., r).$$

Considerando también (1.2), comprobamos que la reserva S_{ij} permite la elaboración (durante un tiempo dado), a lo sumo, de una cantidad de producto igual a

$$(3.1) \quad (P_{ij})_{\max} = \frac{t_{ij} S_{ij}}{a_{ij}} \quad (i = 1, 2, ..., l;\ j = 1, 2, ..., r).$$

Durante un proceso técnico j, los elementos respectivos del equipo técnico S_{1j}, S_{2j}, ..., S_{lj} determinan una correspondiente cantidad máxima del producto $(P_{1j})_{\text{máx}}$, $(P_{2j})_{\text{máx}}$, ..., $(P_{lj})_{\text{máx}}$. La menor de ellas constituye la *potencia productiva* de un proceso técnico dado, al que designamos por medio de $\hat{P}_j$. Así, tenemos:

$$(3.2) \quad \hat{P}_j = \min_i (P_{ij})_{\max} \quad (j = 1, 2, ..., r).$$

En un caso particular, cuando $(P_{1j})_{\text{máx}} = (P_{2j})_{\text{máx}} = ... = (P_{lj})_{\text{máx}}$, la estructura del equipo técnico es armónica. Cuando esta condición no se realiza, dicha estructura es disarmónica. Entonces el capital fijo i, que cumple con la condición (3.2), constituye un *elemento limitante* del equipo técnico. Como una medida de la disarmonía de la estructura del equipo técnico puede servir la diferencia

$$\max_i (P_{ij})_{\max} - \min_i (P_{ij})_{\max},$$

o sea,

$$(3.3) \quad \max_i (P_{ij})_{\max} - \hat{P}_j \quad (j = 1, 2, ..., r).$$

esta es la diferencia que existe entre la máxima potencia productiva potencial, que es factible gracias a los elementos respectivos del

equipo técnico, y la potencia productiva real, determinada por el elemento limitante.

La unificación de los procesos técnicos k ($k \leqslant r$) da un proceso cuya potencia productiva es

$$\min_i \sum_{j=1}^{k} (P_{ij})_{\max}.$$

Esto conduce a la disminución de la disarmonía de la estructura del equipo técnico, si

$$\max_i \sum_{j=1}^{k} (P_{ij})_{\max} - \min_i \sum_{j=1}^{k} (P_{ij})_{\max} < \tag{3.4}$$
$$< \max_i (P_{ih})_{\max} - \min_i (P_{ih})_{\max}$$

para todos $h = 1, 2, \ldots, k$.

Designemos por medio de W_j la repetición múltiple de los números $(P_{1j})_{\max}$, $(P_{2j})_{\max}$, ..., $(P_{ij})_{\max}$ en el proceso técnico j. Entonces

$$\lambda_{ij} = \frac{W_j}{(P_{ij})_{\max}} \tag{3.5}$$

es total para todos $i = 1, 2, \ldots, l$. En este proceso, multiplicando el elemento del equipo técnico S_{ij} por λ_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, l$) obtenemos el proceso técnico j repetido de una manera múltiple. En el proceso repetido de una manera múltiple los elementos del equipo técnico son

$$\lambda_{1j} S_{1j}, \ \lambda_{2j} S_{2j}, \ldots, \lambda_{lj} S_{lj}.$$

Según (3.1), dichos elementos permiten elaborar una cantidad del producto igual a

$$\lambda_{1j} (P_{1j})_{\max} = \lambda_{2j} (P_{2j})_{\max} = \ldots = \lambda_{lj} (P_{lj})_{\max} = W_j \tag{3.6}$$

considerando (3.6). La repetición múltiple del proceso técnico conduce a una armonización total de la estructura de su equipo técnico.

§ 4. *Sustitución.*—La siguiente interpretación geométrica ilustra la ley de sustitución de desembolsos. Presentamos los procesos técnicos como vectores en el espacio dimensional $\mathbf{w}$ $(n + l)$ euclidiano. Los componentes de estos vectores son elementos de una

matriz completa efectiva de la técnica de producción. Cada vector posee $n + l$ componentes, o sea, n desembolsos unitarios (coeficientes de producción), así como también l elementos del equipo técnico. Es evidente que algunos componentes pueden tener un valor cero (cuando alguno de los factores productivos no es utilizado en un proceso técnico dado). Los extremos de estos vectores determinan una cierta hipersuperficie conjuntiva, la cual se compone de $(n + l - 1)$ simplexos dimensionales. La ley de la sustitución emite el juicio de que dicha hipersuperficie «desciende» en dirección por lo menos de una coordenada, es decir —lo que en el fondo es la misma cosa—, que la proyección de esta hipersuperficie, por lo menos sobre una de las paredes del sistema de las coordenadas, constituye una línea «descendente».

Puesto que la numeración de los factores productivos y de los elementos del equipamiento técnico es libre, dibujamos esta proyección igual que en la figura 1.

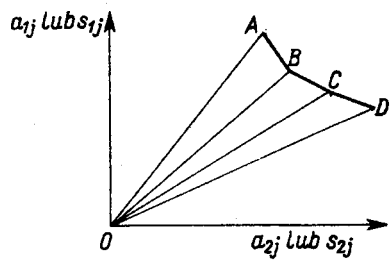


FIG. 1.

Esta figura presenta la pared del sistema de coordenadas trazadas por dos coordenadas que representan desembolsos o elementos del equipo técnico. Los vectores *OA, OB, OC, OD,* etc. son las proyecciones sobre la pared de los vectores que representan los procesos técnicos diferentes. Los vértices *A, B, C, D,* etc. de estos vectores señalan la línea quebrada *ABCD,* etc. Dicha línea constituye una proyección sobre la pared de la hipersuperficie citada, señalada por los extremos $(n + l)$ de los vectores dimensionales que representan los procesos técnicos. Conforme a la ley de sustitución de los desembolsos, esta línea quebrada es «descendente» y realmente, si dicha línea fuese ascendente, entonces, como es fácil convencerse al ver el dibujo, los procesos técnicos correspondientes a los vectores *OB, OC, OD* exigirían mayores

desembolsos unitarios, o bien mayores elementos del equipo técnico de los que requiere el proceso que le corresponde al vector *OA*. Estos procesos serían funcionales. Dichos procesos serían igualmente funcionales si la línea *ABCD* fuese horizontal, puesto que entonces los procesos representados por los vectores *OB*, *OC* y *OD* exigirían un mayor desembolso unitario a_{2j}, o bien un elemento mayor del equipo técnico S_{2j} que el del proceso representado por el vector *OA*, conservando, sin embargo, el mismo gasto por unidad a_{1j} e igual componente del equipo técnico S_{1j}. En cambio, si dos o más vértices *A*, *B*, *C*, *D*, etc. coincidiesen, los procesos técnicos serían equivalentes. Como resultado, la línea *ABCD*, etc. tiene que ser «ascendente». Esto constituye una expresión geométrica de la ley de la sustitución de los desembolsos.

§ 5. *Procesos mixtos.*—Al aplicar el proceso técnico mixto los desembolsos unitarios constituyen un promedio ponderal de desembolsos unitarios en los procesos técnicos, de los cuales se compone el proceso mixto. Supongamos que una cantidad determinada del producto se fabrica de tal modo que la cantidad x_1 es elaborada por medio del proceso al cual designaremos con el número 1, y la cantidad x_2 —mediante el proceso al cual designaremos con el 2. Supongamos que a_{i1} sea el desembolso unitario del factor productivo i en el proceso 1; en cambio, a_{i2} será un desembolso unitario del mismo factor en el proceso 2. Entonces el desembolso de este factor en el proceso 1 es $a_{i1}x_1$ y el mismo en el proceso 2 es $a_{i2}x_2$.

El desembolso unitario en el proceso mixto (lo designaremos mediante $\bar{a}_{ix}$) es igual a

$$\bar{a}_{ix} = \frac{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2}{x_1 + x_2}.$$

Designemos por medio de $x = \dfrac{x_1}{x_1 + x_2}$ la participación del primer proceso en la producción del proceso mixto. La participación del segundo proceso es $\dfrac{x_2}{x_1 + x_2} = 1 - x$. El desembolso unitario del factor i en el proceso mixto puede presentarse en forma de

$$\bar{a}_{ix} = a_{i1}x + a_{i2}(1 - x). \tag{5.1}$$

Como se ve, éste depende del parámetro x, el cual determina en qué proporción el producto está siendo elaborado con la ayuda de cada uno de los dos procesos técnicos.

Tomemos ahora la pared del sistema de coordenadas, la cual está trazada por los desembolsos unitarios de los factores productivos, el primero y el segundo (la numeración de los factores es libre), o sea, por las coordenadas a_{1j} y a_{2j}. La figura 2 presenta las proyecciones sobre dicha pared de los vectores que representan el proceso técnico 1 y el proceso técnico 2.

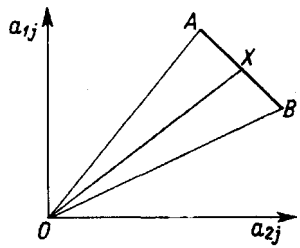


FIG. 2.

Estos son los vectores OA y OB. Los extremos de dichos vectores, el A y el B, tienen las coordenadas (a_{11}, a_{21}), así como también (a_{12}, a_{22}). Al proceso mixto, compuesto de los dos procesos mixtos citados, le corresponde el vector (la proyección), cuyo extremo tiene las coordenadas $(\bar{a}_{1x}, \bar{a}_{2x})$. En el dibujo lo designaremos mediante OX.

Considerando (5.1), tenemos

$$\bar{a}_{1x} = a_{11}\,x + a_{12}\,(1 - x),$$
$$\bar{a}_{2x} = a_{21}\,x + a_{22}\,(1 - x),$$

es decir, una ecuación paramétrica de la recta que atraviesa los puntos cuyas líneas coordenadas son (a_{11}, a_{21}) y (a_{12}, a_{22}), o sea, atraviesa los puntos A y B. Resulta, por lo tanto, que el punto X, es decir, el final del vector OX que representa el proceso mixto, se encuentra en la recta AB. La situación del punto X en este sector depende del parámetro x. Si $x = 1$, entonces el punto X coincide con el punto A (se está aplicando el proceso 1 solamente); en cambio, si $x = 0$, entonces el punto X coincide con el punto B (se está aplicando solamente el proceso 2); para $0 < x < 1$ el punto X se encuentra entre el punto A y el punto B, a una distancia que depende de la proporción en la división de la producción entre ambos procesos técnicos.

§ 6. *Propiedades de la cuota de sustitución.*—Estamos examinando los tres procesos técnicos divisibles designados como 1, 2, 3,

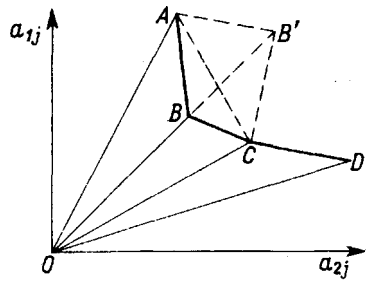


FIG. 3.

cuyos vectores —proyecciones sobre la pared de las líneas coordenadas señaladas por el primero y segundo factores productivos— están ilustradas en la figura 3.

Estos son los vectores *OA, OB, OC.* En el dibujo también es evidente el vector *OX,* el cual corresponde a un determinado proceso mixto que se compone de los procesos 1 y 3. Si el vector *OB* que representa el proceso técnico 2 es más largo que el vector *OX* (por ejemplo, tiene la longitud *OB'*), entonces dicho proceso requiere mayores desembolsos unitarios de los dos factores de producción que el citado proceso mixto, o sea, resulta infuncional en relación a éste. Si, en cambio, la longitud del vector *OB* es igual a *OX,* entonces el proceso 2 requiere los mismos desembolsos unitarios que el proceso mixto, lo que dice que éste es un proceso equivalente mixto. Por esta razón el proceso 2 es efectivo sólo si el vector *OB* es más corto que el vector *OX,* el cual corresponde al proceso mixto mencionado.

Un razonamiento similar se puede aplicar para los procesos técnicos 2, 3 y 4, así como también, para los vectores respectivos *OB, OC* y *OD,* etc., en la figura 3, etc. En efecto, resulta que la línea quebrada *ABCD,* etc., señalada por los extremos de los vectores (proyecciones) que representan los procesos técnicos efectivos, es convexa en relación al principio del sistema de las coordenadas. También resulta que sólo la mezcla de los procesos técnicos «colindantes» [3], por ejemplo de los procesos 1 y 2, 3 y 4, etc., es efectiva. En el dibujo se nota de una manera directa que cualquier

[3] Según la ley de sustitución, la línea quebrada *ABCD,* etc. es «descendente». Los vértices *A, B, C* y *D,* etc. se pueden, por lo tanto, arreglar monotónicamente conforme a la altura de éstas, y de acuerdo con los vértices, pueden arreglarse los vectores *OA, OB, OC, OD,* etc. Los procesos técnicos «colindantes» los definimos como procesos, a los cuales les corresponden los vectores adyacentes en un conjunto de vectores ordenados de esa manera.

proceso mixto proveniente de los procesos 1 y 3 está representado por medio del vector cuyo extremo se encuentra en el sector AC. Un proceso mixto de este tipo requiere un desembolso unitario mayor por parte de ambos factores productivos que el proceso 2. De modo similar, la unificación de los procesos 2 y 4 exige un mayor desembolso unitario de ambos factores que el proceso 3, y la unificación de los procesos 1 y 4 requiere un mayor desembolso unitario de los dos factores que los procesos 2 y 3.

La línea quebrada $ABCD$, etc. es «descendente» y, a la vez, es convexa en relación al principio del sistema de las líneas coordenadas. De ahí dimana que la inclinación de sus vectores respectivos (AB, BC, CD, etc.) en relación a los ejes seccionados decrece (figura 3); los coeficientes (tangentes) de la inclinación de los sectores subsecuentes AB, AC, CD, etc. forman, por consiguiente, una progresión descendente

$$(6.1) \qquad \left|\frac{a_{11}-a_{12}}{a_{21}-a_{22}}\right| > \left|\frac{a_{12}-a_{13}}{a_{22}-a_{23}}\right| > \left|\frac{a_{13}-a_{14}}{a_{23}-a_{24}}\right| > \ldots$$

Esto está ilustrado en la figura 4. El primer término de dicha progresión es igual a la tangente del ángulo ABR, o sea, al coeficiente de inclinación del vector AB.

Del mismo modo, se puede demostrar que los términos ulteriores de la progresión arriba presentada son iguales a los coeficientes de inclinación de los sectores BC, CD, etc. Los coeficientes de inclinación los expresamos por medio de valores absolutos, porque de otra manera éstos serían negativos, puesto que los sectores AB, BC, CD, etc. son «descendentes».

Las inversiones de los coeficientes de inclinación (6.1) forman una progresión ascendente:

$$(6.2) \qquad \left|\frac{a_{21}-a_{22}}{a_{11}-a_{12}}\right| < \left|\frac{a_{22}-a_{23}}{a_{12}-a_{13}}\right| < \left|\frac{a_{23}-a_{24}}{a_{13}-a_{14}}\right| < \ldots$$

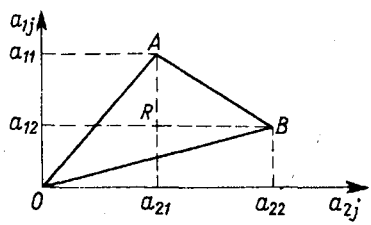


FIG. 4.

Estas inversiones constituyen *cuotas de sustitución* de los desembolsos, que miden el incremento del desembolso unitario de un factor en relación a una unidad de decremento de un desembolso unitario del segundo factor. La progresión de las desigualdades (6.2) confirma que cuando existe una transición consecutiva de un proceso técnico (colindante) a otro, la cuota de sustitución de los desembolsos crece. A esta propiedad la denominamos *ley de la creciente cuota de sustitución de los desembolsos.*

Considerando los ingresos como desembolsos negativos, obtenemos la ley de la cuota decreciente de sustitución de los ingresos como conclusión directa de la ley de la creciente cuota de sustitución de los desembolsos. Transformando los desembolsos negativos en ingresos calculados de manera positiva, cambiamos el símbolo de la progresión de desigualdades (6.2). La ley de la cuota decreciente de sustitución de los desembolsos se presenta entonces geométricamente por medio de una línea quebrada cóncava en relación al principio de los ejes de coordenadas. Esto está ilustrado en la figura 5. En esta figura los ejes de líneas coordenadas Oa_{1j}, así como también Oa_{2j}, representan los ingresos unitarios, o sea,

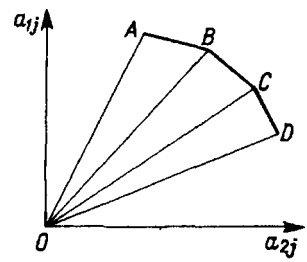


FIG. 5.

el ingreso (la cantidad del producto) que se obtiene por una unidad del desembolso.

De una manera similar, también como una conclusión sacada de la ley de la cuota creciente de sustitución, deducimos la ley de los desembolsos adicionales crecientes (de la decreciente productividad de éstos). Analizamos un desembolso unitario positivo (de un factor productivo) y un desembolso unitario negativo, es decir, el ingreso, o sea, la cantidad del producto elaborado. La disminución del desembolso unitario la interpretamos simplemente como un incremento del ingreso unitario, es decir, incremento por una unidad de la cantidad del producto. Presentando el ingreso como

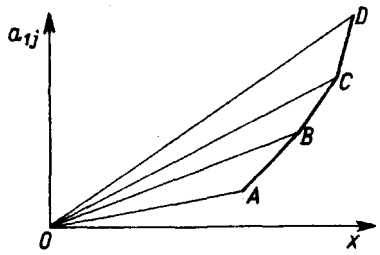


FIG. 6.

una magnitud positiva (designada por medio de x), obtenemos la interpretación geométrica, la cual está representada en la figura 6.

§ 7. *La teoría neoclásica de la producción.*—La concepción arriba presentada de relaciones cuantitativas en el proceso productivo acepta la existencia (en la práctica no muy grande) de un número finito de procesos técnicos con cuya ayuda puede fabricarse un producto dado. Además, toma en cuenta la existencia de un equipo técnico determinado y de una determinada potencia productiva de procesos correspondientes vinculada a este hecho. Si omitimos la premisa de que existe un equipo técnico determinado (y una determinada potencia productiva) y aceptamos, en cambio, que los procesos productivos son divisibles, y su número es infinito y forma un *continuum* (proceso continuo) ininterrumpido en el cual la ley de sustitución se aplica a todos los factores productivos (y en el caso de la producción conjuntiva, a todos los productos), entonces obtenemos la teoría neoclásica de la producción.

Los extremos de los vectores que representan los procesos técnicos respectivos forman entonces una línea continua (la llamada línea no quebrada); en lugar del cuadro presentado en la figura 1 o en la figura 3, obtenemos un cuadro como en la figura 7.

La línea que une los extremos de los vectores correspondientes se llama *isocuanta* (es un lugar geométrico de todos los procesos técnicos factibles que producen la misma cantidad de producto). La línea gruesa presentada en el dibujo constituye una isocuanta, la cual corresponde a la elaboración de una unidad de producto, puesto que los radios *OA, OB, OC, OD*, etc. constituyen vectores de desembolsos unitarios. En vista de que, según la premisa aceptada, no existe un equipo técnico determinado ni una determinada potencia productiva propia de los procesos respectivos, los procesos son divisibles y la producción puede llevarse a cabo en cualquier escala. Si duplicamos la cantidad del producto, se duplican

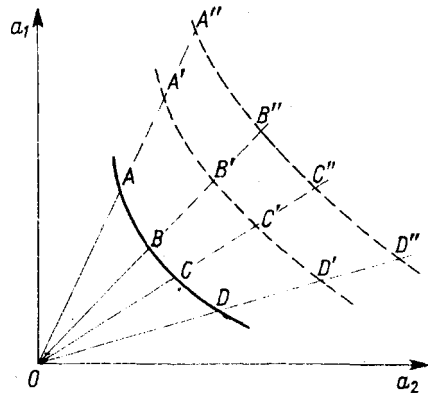


FIG. 7.

los desembolsos de los factores productivos. En vez de los vectores que representan los desembolsos unitarios en los respectivos procesos técnicos, obtenemos vectores de una longitud duplicada (*OA'*, *OB'*, *OC'*, *OD'*, etc. en el dibujo) que representan desembolsos de los factores productivos en los procesos que elaboran dos unidades de producto. Los extremos de dichos vectores señalan la isocuanta presentada en el dibujo en forma de una línea no continua. Esta isocuanta corresponde a la fabricación de dos unidades de producto. De una manera similar, pueden obtenerse isocuantas que corresponden a las diversas cantidades del producto o, como decimos, a las diferentes *dimensiones de la producción*. Las longitudes de los vectores cuyos extremos señalan las isocuantas son proporcionales a la cantidad de productos, o sea, a la dimensión de la producción. Por consiguiente, todas las isocuantas son paralelas.

Como resultado obtenemos una familia de isocuantas, la cual, en el caso en que hay dos factores, como en la figura 7, puede presentarse, por medio de la ecuación

$$f(a_1x, a_2x) = x$$

así como también, en el caso de n factores aplicados en la producción, en forma de la ecuación

$$f(a_1x, a_2x, \ldots, a_nx) = x. \tag{7.1}$$

En esta ecuación el parámetro x designa la dimensión de la producción. Es evidente que los desembolsos de los factores productivos

a_1x, a_2x, ..., a_nx son proporcionales a la dimensión de la producción.

Escribiendo $v_1 = a_1x$, $v_2 = a_2x$, ..., $v_n = a_nx$, y escribiendo la dimensión de producción x del lado izquierdo de la ecuación, obtenemos la expresión

$$x = f(v_1, v_2, \ldots, v_n). \tag{7.2}$$

La dimensión de producción x constituye aquí una función de los desembolsos de los factores productivos v_1, v_2, ..., v_n. En la teoría neoclásica dicha función se determina como *función productiva.* Del (7.1) dimana que ésta es una función homogénea de primer grado [4].

La teoría neoclásica de la producción establece que la función productiva posee primeras y segundas derivadas. Las primeras derivadas de la función productiva tienen el nombre de *productividades marginales* de los factores productivos respectivos. Al mismo tiempo, se acepta que

$$\frac{\partial f}{\partial v_i} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v_i^2} < 0 \tag{7.3}$$

para los v_i que rebasan un cierto valor ($i = 1, 2, \ldots, n$). La última desigualdad expresa la ley de los ingresos decrecientes.

Las isocuantas son líneas «descendentes» (la ley de sustitución de los desembolsos), así como también éstas son convexas respecto al comienzo del sistema de las coordenadas (la ley de la crecien-

[4] La homogeneidad de la función productiva se presenta como una hipótesis en las formulaciones anteriores de la teoría neoclásica de la producción. Como suposición fue aceptada, ante todo, por P. H. WICKSTEED, *An Essay on the Coordination of the Laws of Distributions,* Londres, 1894. En las formulaciones posteriores se acepta que la función productiva es homogénea para toda una rama de producción solamente, y no necesariamente para un establecimiento productivo dado. La homogeneidad de la función productiva para una rama de producción se obtiene como resultado de la hipótesis de que todos los establecimientos elaboran una cantidad óptima de producto. Entonces el aumento de la dimensión de producción se realiza por medio de la repetición múltiple de la cantidad de establecimientos (cada uno de los cuales sigue produciendo la misma cantidad óptima), en resultado de lo cual se opera una repetición múltiple, proporcional al desembolso de todos los factores productivos. Dicha solución del problema de homogeneidad de la función productiva la confirmó K. WICKSELL, *Lectures on Political Economy,* tomo I, traducción del sueco, Londres, 1935, pp. 127-131. La cuestión de la homogeneidad de la función provocó una gran discusión, sobre la cual informa G. J. STIGLER, *Production and Distribution Theories,* Nueva York, 1941. Ver también E. SCHNEIDER, *Theorie der Production,* pp. 19-21.

te cuota de sustitución de los desembolsos). Lo convexo de las isocuantas se expresa por medio de la desigualdad

$$\frac{d^2v_1}{dv_2^2} > 0, \tag{7.4}$$

donde v_1 y v_2 son los desembolsos de dos factores productivos diferentes (la numeración de los factores es libre).

Entre la ley de la creciente cuota de sustitución de los desembolsos cuya expresión constituye la desigualdad (7.4) y la ley del ingreso decreciente expresada por medio de la segunda desigualdad (7.3), ocurre la siguiente relación.

Basándonos en el teorema de las derivadas de las funciones intrincadas, tenemos:

$$\frac{dv_1}{dv_2} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial v_2}}{\dfrac{\partial f}{\partial v_1}}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{d^2v_1}{dv_2^2} = \tag{7.5}$$

$$= -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial v_2^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial v_1}\right)^2 - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial v_2 \partial v_1}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial v_1}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial v_2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial v_1^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial v_2}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial v_1}\right)^3}.$$

La desigualdad (7.4) requiere que este término sea positivo. Como regla, esto está asegurado debido a las desigualdades (7.3), la segunda de las cuales expresa la ley del ingreso decreciente.

No obstante, en el caso en que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v_1 \partial v_2} < 0,$$

o sea, cuando el incremento del desembolso v_2 disminuye la productividad marginal del v_1 puede suceder que el término tome el valor cero o tome un valor negativo. Esto ocurre cuando tal disminución de la productividad marginal es muy pronunciada; la acción de la ley del ingreso decreciente se frustra en este caso.

Y a la inversa: la desigualdad (7.4) puede cumplirse en el caso en que la segunda de las desigualdades (7.3) no se realiza (es decir, no opera la ley del ingreso decreciente). Esto puede producirse cuando

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v_1 \partial v_2} > 0,$$

o sea, cuando el incremento del desembolso v_2 aumenta la productividad marginal v_1. Si este incremento es muy notable, puede reemplazar la ausencia de la acción de la ley del ingreso decreciente.

La acción frustrante citada, de la influencia que ejerce el desembolso de un factor productivo sobre la productividad marginal, es, sin embargo, limitada, gracias a la homogeneidad de la función productiva. Las funciones homogéneas de primer grado cumplen con la siguiente relación entre las derivadas segundas [5].

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v_1 \partial v_r} v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial v_2 \partial v_r} v_2 + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial v_r^2} v_r + \ldots +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial v_n \partial v_r} v_n = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

De esta relación dimana que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v_r^2} = \frac{1}{v_r} \sum_{i \neq r} \frac{\partial^2 f}{\partial v_i \partial v_r} v_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{7.6}$$

La segunda de las desigualdades (7.3) ejerce, por consiguiente, ciertas limitaciones respecto a las derivadas mixtas que se encuentran del lado derecho de (7.6).

En un caso particular, cuando la función productiva es función de dos variables solamente, la ley del ingreso decreciente constituye tanto la condición suficiente como la necesaria de la cre-

[5] Dicha relación dimana del teorema de Euler para las funciones homogéneas de primer grado. En el caso de las funciones homogéneas de primer grado, según este teorema, es

$$\frac{\partial f}{\partial v_1} v_1 + \frac{\partial f}{\partial v_2} v_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial v_n} v_n = f.$$

Diferenciando esta igualdad respecto a v_r obtenemos la relación arriba presentada.

ciente cuota de sustitución de los desembolsos. Por consiguiente (7.6), toma la forma de

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial v_2^2} = \frac{v_1}{v_2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v_1 \partial v_2}.$$

Al introducirlo en el término (7.5) obtenemos

$$\frac{d^2 v_1}{dv_2^2} = -\frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial v_2 \partial v_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial v_1}\left(\frac{v_1}{v_2} \cdot \frac{\partial f}{\partial v_1} + 2\frac{\partial f}{\partial v_2}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial v_1^2}\left(\frac{\partial f}{\partial v_2}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial v_1}\right)^3}$$

Considerando que $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $\frac{\partial f}{\partial v_1} > 0$, $\frac{\partial f}{\partial v_2} > 0$, encontramos que $\frac{d^2 r_1}{dr_2^2} > 0$ sólo y únicamente cuando $\frac{\partial^2 f}{\partial v_2^2} < 0$, o sea, cuando se cumple la segunda de las desigualdades (7.3). Esto no se realiza, empero, en un caso general, cuando la función productiva constituye una función de más de dos variables.

La producción conjuntiva puede tomarse en consideración, como ya lo hemos presentado, al tratar los productos, diferentes al producto de referencia, como factores productivos, cuyos desembolsos son negativos, o bien, designando todos los productos por medio de números positivos y todos los desembolsos mediante los números negativos (o viceversa) [6]. Considerando los productos como desembolsos negativos, encontramos que la desigualdad (7.4) expresa también la ley de la cuota decreciente de sustitución de los ingresos. En cambio, suponiendo que r_1 representa el desembolso y r_2 representa la cantidad del producto con un signo negativo, interpretamos la desigualdad (7.4) como ley de los crecientes desembolsos adicionales, o sea, la ley de la decreciente productividad de los desembolsos adicionales. No obstante, se debe afirmar que la ley de la productividad decreciente de los desembolsos adicionales,

[6] La concepción de la producción conjuntiva efectuada al considerar los desembolsos como ingresos negativos fue introducida por J. R. HICKS, *Value and Capital*, Londres, 1946, p. 319, [existe traducción en castellano: *Valor y capital*, F. C. E., México, 1954]. Posteriormente esta concepción fue también aceptada para el llamado análisis de las funciones, es decir, teoría de la producción basada en el examen de un número finito de procesos técnicos. Sobre esta cuestión ver O. LANGE, *Optymalne decyzje*, Varsovia, 1964, [traducción castellana citada] y a R. D. G. ALLEN, *Economía matemática*, ed. cit., pp. 717-718.

considerada de esta manera, tiene el carácter de una *premisa* establecida, y no es consecuencia de la ley de la cuota decreciente del ingreso interpretado como una productividad marginal decreciente, es decir, como un cumplimiento de la segunda de las desigualdades (7.3). Puesto que, como sabemos, la segunda desigualdad (7.3), así como también la desigualdad (7.4), por lo general, no coinciden.

Es evidente que la teoría neoclásica de la producción considera las relaciones cuantitativas que existen en el proceso productivo de una manera bastante idealizada; constituye un modelo teórico que está lejos de la realidad de la producción. En efecto, el número de los procesos técnicos es finito (y, por lo regular, nada extenso), y los procesos técnicos respectivos se distinguen por un equipo técnico dado y por una determinada potencia productiva. Además, en la realidad, no todos los factores productivos, ni mucho menos, están sometidos a la ley de la sustitución, y la ley del ingreso decreciente, concebida como una característica de la función productiva, o sea, como una regularidad tecnológica, constituye una generalización que carece de una base empírica.

La teoría neoclásica de la producción debe, por consiguiente, considerarse como un ensayo abortivo de la concepción de las relaciones cuantitativas que operan en el proceso productivo [7]. Ésta deviene históricamente de la teoría de los tres factores productivos paralelos: el trabajo, el suelo y el capital —así como también de las tentativas de justificar la distribución del producto social entre los propietarios de dichos «factores»—. Constituye un intento de generalización y, a la vez, modernización de esta teoría. Su divulgación dimana del hecho de que ésta se prestaba para las conclusiones apologéticas que justifican la división del ingreso social que existe en el modo de producción capitalista como distribución basada en el principio de conceder a los propietarios de los factores productivos el valor del producto marginal de dichos factores. Trataremos esta cuestión más a fondo en el siguiente tomo de esta obra.

[7] Sobre la cuestión de la teoría neoclásica de la producción ver también O. LANGE, *Optymalne decyzje*, y las interesantes observaciones en el trabajo de H. SCHULTZ, *Marginal Productivity and the general Princing Process*, «Journal of Political Economy», Chicago, 1929.

CAPÍTULO III

RENOVACIÓN DE LOS MEDIOS DE PRODUCCION

LA reproducción es una repetición constante del proceso constructivo. Ésta requiere, como sabemos, una renovación constante de los medios de producción desgastados, así como también la renovación de la fuerza de trabajo. La renovación de la fuerza de trabajo exige que se consuman productos y también que se empleen servicios necesarios para la renovación de la fuerza de trabajo de los seres humanos existentes y para la renovación de las generaciones. Puesto que el asegurar los servicios vinculados a este hecho también requiere consumo y utilización de ciertos productos como medios de efectuar los servicios; por lo tanto, la renovación de la fuerza de trabajo se reduce al consumo de los productos. La renovación de la fuerza de trabajo se lleva a cabo por medio del consumo, o sea, mediante el consumo de los medios indispensables para comenzar la fuerza de trabajo. Ésta se efectúa fuera del proceso productivo [1] y con la producción está ligada sólo indirecta-

[1] En el marco de la esclavitud la renovación de la fuerza de trabajo puede efectuarse directamente dentro del proceso productivo. Esto sucede cuando los propietarios llevan a cabo la «cría» de esclavos a imagen de la cría de animales de trabajo. Este tipo de cría constituye un proceso productivo, y los medios indispensables para mantener a los esclavos constituyen medios de producción, al igual que el pienso, los establos y las diversas instalaciones lo son para las bestias de trabajo. No obstante, como regla, en las sociedades con un modo de producción esclavista ese tipo de cría dirigida de esclavos sólo se llevaba a cabo en una escala limitada. La renovación de la fuerza de trabajo en la mayoría de los casos era resultado de los procesos demográficos espontáneos que se operaban entre la población esclava, y especialmente era el resultado de la conquista de nuevos esclavos (es decir, de la transformación de personas libres en esclavos) por medio de guerras y secuestros de personas. La conquista de los esclavos por medio de guerras y asaltos a los poblados para obtener hombres jugaba un papel muy importante en la antigua formación social, sobre todo en la antigua Roma. Ver N. MASZKIN, *Historia starozytnego Rzymu* (Historia de la Roma antigua) (traducción del ruso), Varsovia, 1951, pp. 249, 327, 524 y 560. Maszkin afirma que en el siglo II antes de nuestra era «criar a un esclavo costaba más de lo que constituía su precio de compra en el mercado» (p. 249). MAX WEBER (*Agrarverhältnisse im Altertum, Gesammelte Aufsätze zur Social- und Wirtschaftsgeschichte*, Tübingen, 1924, pp. 19 y 244) presta su atención al hecho de que el encuartelamiento de los esclavos de los latifundios hacía imposible la reproducción natural de éstos. El fin de las guerras y la piratería causó la transición al colonato. El rapto de la gente en Africa ha sido una fuente de

mente, de tal manera que el «producto» de consumo de los medios de vida indispensables constituye capacidad de ejecutar el trabajo que es base de los factores personales que actúan en el proceso productivo. En tanto que la renovación de los medios de producción se lleva a cabo dentro del propio proceso productivo, ésta se realiza a través de la producción de los medios de producción necesarios para reemplazar los medios que sufren desgaste en el proceso productivo. Por consiguiente, aquí nos limitamos a la cuestión de las relaciones cuantitativas que existen durante la renovación de los medios de producción. En cambio, la renovación de la fuerza de trabajo constituye un problema de la demografía, de la higiene y de la medicina, de la educación y cuidado de enseñanza profesional, de la psicología y sociología del trabajo, etc.

La renovación de los medios de producción se realiza de un modo diferente en el caso del capital circulante y cuando se trata del capital fijo. El capital circulante se consume totalmente en el curso de un solo período productivo, y durante ese período es necesario reemplazarlo con medios nuevos. Durante una unidad de tiempo de calendario (por ejemplo, un año) la cantidad de los medios de producción desgastados es igual a la cantidad consumida en el transcurso del período productivo multiplicada por el número (entero o fracción) de los períodos productivos que caben dentro de la unidad de calendario considerada. Para la renovación de los medios desgastados es necesaria una determinada cantidad de capital circulante. Conociendo los desembolsos unitarios de los capitales circulantes respectivos en el proceso técnico aplicado en la producción, esta cantidad puede calcularse, es decir, ésta será igual al cociente del desembolso unitario, así como también a la cantidad del producto elaborado (durante una unidad de tiempo). La renovación de los capitales fijos es más complicada. Estos medios se desgastan gradualmente, son utilizados durante unos cuantos o más procesos productivos, y cuando se acaba su facultad de utilización éstos se retiran y son sustituidos por otros. La renovación de los capitales fijos correspondientes no se realiza de la manera co-

la aparición y suministro de población esclava en América (tanto en el continente, especialmente en la parte meridional de los Estados Unidos, como también en las islas del mar Caribe). En los años de 1486 a 1641 sólo de las costas de Angola partieron un millón cuatrocientos mil esclavos; en los años de 1580 a 1680 se trasladaron alrededor de un millón de esclavos al Brasil, o sea, diez mil por año. En el transcurso de once años, de 1783 a 1793, en tránsito a través de Liverpool se desplazaron trescientos mil esclavos. Ver B. DAVIDSON, *Stara Afryka odkryta na nowo* (La vieja Africa descubierta de nuevo) (traducción del inglés), Varsovia, 1961, p. 107.

rriente, como cuando se trataba del capital circulante, sino después de un lapso de tiempo más o menos largo, es decir, después del período de utilización del medio respectivo [2]. Antes de terminar su período de utilización el capital fijo conserva la facultad de ser utilizado y no requiere renovación.

Sin embargo, para ser conservado en el estado apto para la utilización, el capital fijo requiere una serie de desembolsos, tanto de trabajo como de los medios de producción. Ante todo, éstos son los *desembolsos de conservación;* los constituyen las diversas funciones, o sea, los tipos de trabajos concretos (trabajos de conservación), así como también los medios de producción; por ejemplo, la pintura con la que se cubren los barcos, los puentes y otros dispositivos de metal para que éstos no se oxiden, yeso para recubrir las paredes de los edificios, aceites para engrasar las piezas de la maquinaria, pienso para los animales de trabajo, abonos para la gleba, etc. Sin los desembolsos de conservación el capital fijo perdería rápidamente su facultad de utilización y algunas veces casi dejaría de ser apto para utilizarse. En segundo término también son necesarios los diversos *desembolsos de reparación.* El capital fijo en el curso de su utilización padece mayores o menores desperfectos, y dichos desperfectos requieren compostura. La compostura de los desperfectos la denominamos *reparación.* La reparación requiere determinados gastos de trabajo (trabajos de reparación), así como también de los medios de producción. Los desperfectos del capital fijo de producción, por lo regular, tienen carácter fortuito, son resultado de la acción de un gran número de causas mayores o menores que no están vinculadas directamente con el propio transcurso del proceso técnico aplicado en la producción, sino que están ligadas a causas «externas» en relación a dicho proceso. En otras palabras: éstas constituyen perturbaciones en el transcurso del proceso técnico aplicado. Las perturbaciones mayores se definen frecuentemente como averías.

Los desperfectos del capital fijo se refieren a las partes respectivas de éstos; por ejemplo, partes de maquinaria, cisternas, edificios, medios de transporte, etc. La compostura consiste en reemplazar las partes dañadas por otras nuevas, o bien en efectuar ciertas manipulaciones en la parte que sufrió el desperfecto (por ejem-

[2] El período de utilización frecuentemente también se determina con el nombre de *período de servicio* (en ruso, *Srok služby;* en inglés, *Service period)* de un capital fijo dado. Este término se emplea ampliamente en la administración de las empresas y aparece ya en las obras de Marx.

plo, tapar un orificio, soldar una varilla rota, fijar una placa que se había despegado). Frecuentemente los desperfectos están vinculados a la duración del tiempo en el cual un capital fijo dado haya sido utilizado. Lo toma en cuenta Marx: «Los deterioros a que se hallan expuestas determinadas partes de la maquinaria, etc. son, por la naturaleza misma de la cosa, fortuitos, cualidad que comparten también, como es lógico, las reparaciones correspondientes. De este complejo se distinguen, sin embargo, dos clases de trabajos de reparación que presentan un carácter más o menos estable y corresponden a distintos períodos de vida del capital fijo: a las enfermedades de infancia y a las enfermedades, mucho más numerosas, de la edad que rebasa ya el tiempo medio de vida. Una máquina, por ejemplo, por muy perfecta que sea su contextura al entrar en el proceso de producción, acusa en el transcurso de su uso real defectos que necesitan ser corregidos mediante un trabajo posterior. Por otra parte, cuanto más rebase su tiempo medio de vida, es decir, cuanto más se vaya acumulando el desgaste normal, cuanto más se vaya agotando por el uso y se vaya debilitando por la edad el material de que está formada, más numerosos e importantes serán los trabajos de reparación necesarios para conservar la máquina en uso hasta el final de su tiempo medio de vida, del mismo modo que un hombre viejo, para no morir antes de tiempo, necesita gastar más en médico y medicinas que un hombre joven y fuerte» [3]. Esto es cierto no sólo para las máquinas, sino para todos los capitales fijos que funcionan en un proceso productivo.

De los deterioros es necesario diferenciar la destrucción total de los capitales fijos. Esta destrucción puede ser consecuencia de accidentes tales como un incendio, una inundación, el hundimiento de un barco, la destrucción de un automóvil, un choque de trenes, etc. Éstos se diferencian de los deterioros porque afectan no sólo las partes correspondientes de un capital fijo, sino al capital en su totalidad o, por lo menos, partes tan esenciales de éste, que no es posible restituirlo a su facultad de utilización por medio de la reparación; es necesario reemplazar el capital fijo por otro nuevo.

El límite que existe entre la renovación de un capital fijo desgastado y la reparación del mismo es, no obstante, sutil. Generalmente, se diferencian las reparaciones corrientes (comunes) y las reparaciones capitales. Las reparaciones corrientes comprenden la

[3] C. MARX, *El Capital*, ed. cit., t. II, p. 155. Marx habla aquí sobre el capital fijo, pero el contenido del párrafo citado se aplica a los medios fijos también en las condiciones de otros modos de producción diferentes al modo de producción capitalista.

compostura de los deterioros que ocurren durante la utilización normal de un capital fijo. Éstas se asemejan a la conservación. La conservación protege el capital fijo ante el desperfecto; la reparación corriente compone varios desperfectos que se presentan en el curso de la utilización de éste en el proceso productivo para evitar deterioros mayores y el desgaste eventual del capital fijo. Los medios de producción desgastados durante la reparación corriente tienen carácter de capital circulante, se consumen totalmente en el curso de la reparación y constituyen una especie de material bruto que entra totalmente en el objeto reparado. Así, por ejemplo, el yeso se convierte en una parte del edificio, un tornillo nuevo en parte de una máquina, el interruptor de corriente en parte de una instalación eléctrica, etc. La renovación de éstos se realiza directamente después de su desgaste, formando la reserva de los medios de reparación listos para ser utilizados en cualquier momento en caso de un nuevo desperfecto [4].

La cosa es diferente cuando se trata de las reparaciones sustanciales. La reparación sustancial consiste en la renovación parcial del capital fijo [5]. En contraste a la reparación corriente, la cual consiste en la compostura de los desperfectos corrientes ocurridos en el curso del proceso productivo, durante la reparación sustancial se opera el cambio de las partes mayores del capital fijo por otras nuevas, partes que de cierta manera constituyen objetos autónomos. Por consiguiente, ésta es una renovación de determinados objetos que constituyen un componente importante de un capital fijo

[4] También una parte de reserva de la fuerza de trabajo se conserva lista para el caso de que se necesite una nueva reparación: «Como es importantísimo reparar inmediatamente las averías de la maquinaria, toda fábrica importante cuenta con el personal necesario para ello, agregado a su personal obrero, con los ingenieros, los carpinteros, cerrajeros, mecánicos, etc., indispensables para esos trabajos de reparación» (C. MARX, *El Capital*, ed. cit., t. II, p. 156). Los mayores establecimientos industriales, granjas agrícolas y los establecimientos de transporte, como regla, poseen talleres de reparación propios. Marx expresó ciertas dudas en cuanto al carácter de los medios de producción desgastados durante la reparación. Examinando la cuestión, en las condiciones de producción capitalista escribe: «Este capital invertido en verdaderas reparaciones constituye en ciertos aspectos un capital de tipo especial, que no puede incluirse ni en el capital circulante ni en el capital fijo, aunque encaja más bien dentro del primer concepto, por destinarse a cubrir gastos corrientes» (*ídem*). Analizando el problema en un contexto más amplio de una formación social, como un problema de propiedades naturales (efectivas) del proceso productivo, parece que el hecho de incluir los medios de producción desgastados en las reparaciones corrientes dentro de la categoría de capital fijo no suscita duda alguna.

[5] Ver C. MARX, *El Capital*, ed. cit., t. II, p. 157: «Las reparaciones se dividen, además, en corrientes y sustanciales. Las segundas implican ya, en parte, la renovación del capital fijo en su forma natural.»

dado; por ejemplo, renovación de las ruedas o de la caldera en una locomotora, del pistón en un motor de combustión, del cilindro giratorio en una fresadora, de los electromagnetos en un generador eléctrico, de los amarres en un puente, del techo en un edificio, de la caldera en una instalación en la industria química, etc. Dichos objetos se someten a la renovación en el sentido exacto de la palabra; éstos poseen, al mismo tiempo, cierta autonomía; no se confunden con el capital fijo reparado (por ejemplo, las ruedas de una locomotora, del pistón en un motor de combustión, del cilindro en una reparación corriente). Estos objetos nuevos sirven durante un tiempo más o menos largo, hasta el momento en que termina el período de la utilización del capital fijo, o bien hasta el retiro y la sustitución de éstos por medios nuevos, cuando se realiza una siguiente reparación sustancial. Por esta razón los contamos entre los capitales fijos.

Las reparaciones sustanciales pueden ser consecuencia de una avería, es decir, desperfectos mayores del capital productivo fijo; también pueden realizarse después de una destrucción parcial del capital de producción fijo a causa de incendios, accidentes, etc., cuando una parte de este medio aún puede ser utilizada, mientras que las otras tienen que ser renovadas. Sin embargo, no todas las reparaciones sustanciales son causadas por los accidentes. Junto a las reparaciones que consisten en la compostura de los desperfectos y de las destrucciones parciales, existen también reparaciones sustanciales que son necesarias en vista de que las partes respectivas del capital fijo se desgastan de una manera no uniforme. Algunas partes se desgastan más rápidamente que otras, y en vez de renovar todo el capital fijo, basta renovar tan sólo las partes de éste que habían sufrido un desgaste más rápido; las restantes, en cambio, pueden seguir siendo utilizadas. Esto constituye una especie de «regeneración» de las partes respectivas desgastadas del capital productivo fijo. De esta manera, la renovación del capital fijo frecuentemente puede llevarse a cabo por etapas, en forma de reparaciones sustanciales consecutivas. Durante cada una de las reparaciones subsecuentes las diferentes partes de éste son renovadas por turno, hasta que en resultado no queda ninguna de las partes originales del capital productivo fijo; este capital ha sufrido una renovación total.

La renovación que se realiza en forma de reparaciones consecutivas se presenta, sobre todo, en el campo del equipo ferroviario. Marx cita el ejemplo siguiente: «En el transcurso del tiempo se

renueva constantemente el *stock* de locomotoras y vagones; una vez se les ponen ruedas nuevas, otra vez se les cambia la plataforma. Las partes sobre que descansa el movimiento y que se hallan más expuestas al desgaste se van renovando gradualmente; las máquinas y los vagones pueden experimentar, además, una serie de reparaciones que en muchos de ellos no dejan ni rastro del material antiguo» [6]. Esto se refiere, en general, a todos los medios de duración larga, es decir, a los que tienen un período de utilización muy largo, tales como edificios, puentes, canales, etc. En estos medios las partes se desgastan de una manera no uniforme; algunas de éstas llevan una carga superior durante la utilización del medio (por ejemplo, las llantas de un automóvil, el cuchillo de una fresadora, un bulbo de radiorreceptor), o bien los que están más expuestos a la acción de los elementos (como, por ejemplo, el techo de un edificio) y requieren renovación antes que las demás partes. No siempre, sin embargo, es factible la renovación en forma de reparaciones sustanciales consecutivas. La mayor parte de la maquinaria que se utiliza en los establecimientos industriales, después de una serie de reparaciones sustanciales, se retira definitivamente y es reemplazada por otra totalmente nueva. Generalmente esto sucede a consecuencia del progreso técnico, que constituye una causa del obsoletismo económico (es decir, el desgaste moral) del capital productivo fijo. En tal caso, el ejemplo citado por Marx tampoco encuentra aplicación. Si una locomotora de vapor es reemplazada por una eléctrica o de diesel, la renovación efectuada por medio de reparaciones sustanciales consecutivas se lleva a cabo por etapas, pierde su objeto; la locomotora de vapor debe ser totalmente retirada y sustituida por una locomotora de otro tipo. No obstante, queda el hecho de que cuando existe un desgaste no uniforme de las partes respectivas del capital fijo unas partes son renovadas antes que otras, lo que constituye una causa de las reparaciones sustanciales.

La duración del tiempo de utilización del capital fijo depende de las reparaciones y conservaciones efectuadas, tanto las corrien-

[6] C. MARX, *El Capital*, t. II, pp. 159-160. Allí encontramos la siguiente cita: «Conservamos cuantitativamente nuestro material de explotación. Cualquiera que sea el número de locomotoras de que dispongamos, conservamos este número... Renovamos nuestras máquinas... La locomotora vieja tiene siempre un par de ruedas, un eje, una pieza cualquiera aprovechables, y esto sirve de base para reconstruir una locomotora por menos dinero del que costaría otra nueva. Yo produzco actualmente una locomotora nueva a la semana, es decir, una locomotora tan buena como si fuese nueva, pues la caldera, el cilindro o el chasis son nuevos.»

tes como también las sustanciales. Suponemos que en el curso de utilización del capital fijo se llevan a cabo todas las conservaciones y reparaciones, de modo que el medio pueda ser utilizado por un tiempo mayor posible. En estas condiciones el tiempo máximo de utilización posible constituye el *período de utilización* del capital fijo: «El tiempo normal de vida del capital fijo se calcula, naturalmente, partiendo del supuesto de que se cumplan las condiciones bajo las cuales puede funcionar normalmente durante este tiempo, del mismo modo que al calcular que el hombre puede vivir treinta años por término medio se da por supuesto que habrá de lavarse» [7]. Esto también atañe al capital fijo en condiciones diferentes al modo de producción capitalista. Como resultado, a cada capital productivo fijo, aplicado en condiciones de un proceso técnico determinado, le corresponde un determinado período de utilización, después de cuyo transcurso este medio será reemplazado por otro nuevo. En el caso en que la renovación se lleva a cabo por etapas en forma de reparaciones sustanciales consecutivas, dicho período, aunque no exista para el capital fijo en su totalidad, existe, sin embargo, para sus partes respectivas. Estas partes las consideramos, entonces, como objetos autónomos de renovación, que poseen un período de utilización determinado.

El período de utilización puede ser igual para todos los ejemplares de un capital fijo dado. No obstante, esto requiere que todos los ejemplares, o sea, los objetos —como diremos— sean totalmente homogéneos y sean utilizados en condiciones idénticas. Por lo regular, no es así. Los objetos correspondientes se diferencian, aunque sea levemente, en cuanto a la resistencia del material, a la potencia de su construcción, a los eslabones más débiles, etc. Tampoco las condiciones de su utilización son idénticas: algunos se someten a cargas mayores, a la acción más fuerte de ciertos procesos químicos, a las diferentes acciones de la atmósfera, humedad, y, finalmente, es distinto el cuidado con que los rodean los trabajadores. Como consecuencia, los diversos objetos, siendo ejemplares del mismo capital productivo fijo, tienen un período de utilización diferente. Apoyándose en la experiencia, se puede, sin embargo, establecer un período de utilización medio para los objetos de un tipo dado; por ejemplo, para los ejemplares correspondientes de un capital fijo respectivo. Dice Marx: «El plazo de vida de un medio de trabajo contiene, por tanto, una serie más o menos nume-

[7] Idem, ibidem, p. 154.

rosa de procesos de trabajo constantemente renovados con él. A los medios de trabajo les ocurre como a los hombres. Todo hombre muere veinticuatro horas al cabo del día. Sin embargo, el aspecto de una persona no nos dice nunca con exactitud cuántos días de vida le va restando ya la muerte. Lo cual no impide a las compañías de seguros de vida establecer cálculos acerca de la vida media del hombre, sacando de ellos conclusiones bastante de fiar, y sobre todo bastante provechosas. Pues lo mismo ocurre con los medios de trabajo. La experiencia enseña cuánto tiempo vive, por término medio, un medio de trabajo, verbigracia una máquina de determinada clase» [8].

Esto sugiere que la renovación del capital fijo trate de administrar los *métodos actuariales*, o sea, métodos de matemáticas de seguros [9]. Basándose en la experiencia obtenida por medio de la obser-

[8] C. MARX, *El Capital*, t. I, p. 153.

[9] Llamamos ciencia actuarial, o bien ciencia matemática del seguro, a la rama matemática que se ocupa de calcular los riesgos, las primas y los fondos de reserva al efectuar los seguros. La base de estos cálculos es la frecuencia con que se presentan los accidentes fortuitos en la masa de los objetos asegurados, cuando estos accidentes ocasionan el pago de las indemnizaciones del seguro. Sobre esa base se determinan las tasas del seguro, necesarias para cubrir el pago de las indemnizaciones, así como también los fondos de reserva para el caso de fluctuaciones imprevistas en la frecuencia de los accidentes fortuitos. Las primeras aplicaciones de la matemática de seguro se referían a los seguros de vida. El material numérico, el cual constituía la base de los cálculos, era aportado por las actas de las compañías aseguradoras, en las que figuraban la edad de los asegurados. Los empleados de las compañías encargadas de las actas se llamaban actuarios y ellos efectuaban los cálculos necesarios. De ahí proviene el nombre de «ciencia actuarial» y el uso de la palabra actuario para designar a una persona que se ocupa de los cálculos del seguro. La base científica para la contabilidad matemática del seguro fue creada por el astrónomo E. Halley, quien publicó en el año 1663 la primera tabla de mortandad. Ya anteriormente, J. Graunt elaboró los orígenes de la tabla de mortandad (1662). En el siglo XVIII la tabla de mortandad fue elaborada por J. P. Süssmilch (1741). Finalmente, P. S. Laplace (1814), en la investigación de la mortalidad, aplicó el cálculo de probabilidades. Posteriormente esto llevó a una concepción matemática de la regularidad del movimiento de la población. La rama de la ciencia que lo realiza se llama *demografía matemática*. Las bases de la demografía matemática fueron desarrolladas por G. Zeuner (1869), F. G. Knapp (1874) y por W. Lexis (1875). Los métodos de la demografía matemática posteriormente han sido aplicados a otros sectores de los seguros, como, por ejemplo, el seguro contra los accidentes en el trabajo, el seguro contra incendios, pérdidas de navegación, etc. Esto condujo, finalmente, a una generalización de los métodos de la demografía matemática en forma de la *teoría de renovación*, la cual investiga las propiedades de los llamados conjuntos renovables, es decir, conjuntos de los cuales desaparecen elementos respectivos, y en los cuales reaparecen simultáneamente elementos nuevos. La población humana, de la cual se ocupa la demografía matemática, o bien la población animal constituye un caso singular en cuanto a este tipo de conjuntos renovables. Las defunciones y los nacimientos constituyen el caso particular de pérdida y crecimiento de los elementos de un conjunto. La teoría de la renovación se formó en base a un componente fundamental de la matemática del seguro, puesto que permite una concepción teórica homo-

vación estadística, o bien en la contabilidad que se lleva a cabo en los establecimientos productivos se pueden formar tablas de distribución de los objetos para los diferentes tipos de capital fijo, de acuerdo con el tiempo de su utilización (el llamado tiempo de servicio) [10]. Dichas tablas también se llaman *tablas de persistencia*, puesto que demuestran el número de objetos que persistieron durante un tiempo de utilización determinado. Éstos se parecen a la clasificación de la población según la edad, exponen «la edad», es decir, el tiempo de utilización de los objetos (ejemplares) respecto

génea para todos los tipos de seguros. La cátedra de la teoría de la renovación la expone W. SAXER, *Versicherungsmathematik*, Berlín, 1955, parte I, cap. X; Berlín, 1958, parte II, cap. IV. En 1913 el economista inglés D. H. Robertson le prestó atención a la analogía que existía entre el proceso de renovación del capital productivo fijo y el proceso de renovación que existía en el estado de la población. Ver D. H. ROBERTSON, *Some Material for a Study of Trade Fluctuations*, «Journal of the Royal Statistical Society», 1913, así como también el mismo: *A Study of Industrial Fluctuations*, Londres, 1915, pp. 36-45. Por último, un destacado demógrafo y actuario, J. Lotka, aplicó la teoría matemática de la renovación del capital fijo productivo en su trabajo *Industrial Replacement*, «Skandinavisk Aktuarietidskrift», 1933. Ver también el trabajo del mismo autor *Contributions to the Theory of Self Renewing Aggregats with special Reference to Industrial Replacement*, «Annals of Mathematical Statistics», 1939. Esto abrió el camino para tratar el problema de la renovación del capital fijo con la ayuda de los métodos actuariales. Dicha concepción se difundió posteriormente. El resultado fue el desarrollo ulterior de la teoría de renovación; en relación a eso, ver M. FRECHET, *Les ensembles statistiques renouvellés et remplacement industriel*, París, 1949; L. KOZNIEWSKA, *Zagadnienia odnowienia* (Problemas de reposición), Varsovia, 1963; LANGE, *Teoria reprodukcji i akumulacji*, Varsovia, 1961, pp. 132-145 [traducción castellana: *Teoría de la reproducción y de la acumulación*]; A. J. BOJARSKI, *Matematiko-ekonomicheskiye ocherki*, Moscú, 1962, cap. IX. El estado contemporáneo de la teoría de la renovación está presentado por W. L. SMITH, *Renewal Theory and its Ramiffications*, «Journal of the Royal Statistical Society», Section B, 1958, y D. R. COX, *Renewal Theory*, Londres, 1962. La teoría de la renovación encuentra también su aplicación en la física nuclear, al investigar el proceso de la desintegración de los núcleos. La aparición y desaparición de partículas elementales durante la desintegración del núcleo constituye un proceso de renovación análogo al proceso de nacimiento y muerte. Uno de los primeros que tomaron en cuenta la significación de los métodos actuariales para la física nuclear fue el destacado estadista-economista Wladislaw Bortkiewich. Ver W. BORTKIEWICH, *Die radioaktive Strahlung als Gegenstand wahrscheinlichkeitstheoretischer Untersuchungen*, Berlín, 1913. Otro campo para la aplicación de la teoría de la renovación es la investigación de los procesos de renovación de las generaciones en las poblaciones biológicas, y, entre otras cosas, en las colonias de las bacterias productoras de las enfermedades en relación al medio de cultivo que éstas obtienen de la población humana (epidemiología), así como también en la acción recíproca que existe entre las diversas poblaciones biológicas (ecología). El destacado matemático V. Volterra fue pionero de estas investigaciones: *Leçons sur la théorie mathematique de la lutte pour la vie*, París, 1931. Sobre este tema ver M. BARTLETT, *Stochastic Population Models in Ecology and Epidemiology*, Londres, 1960.

[10] Aquí nos interesan los capitales productivos fijos. Las tablas de distribución de los objetos arregladas conforme al tiempo de su utilización pueden, sin embargo, aplicarse al capital de consumo (bienes de consumo), por ejemplo, para las casas-habitación, automóviles, etc.

del tipo de un capital fijo dado, en forma de una *tabla estadística de clasificación*. En la primera columna se indica el tiempo durante el cual dicho objeto es utilizado, o sea, su edad. En la segunda columna —está presentado— el número correspondiente de objetos. Lo ilustra la tabla 1, la cual presenta la distribución conforme al tiempo de utilización (por ejemplo, en semanas) de 100 000 focos instalados [11].

TABLA 1

DISTRIBUCIÓN DE LOS FOCOS SEGÚN EL TIEMPO DE SU UTILIZACIÓN
(Tabla de resistencia)

Edad (en semanas) τ	El número de focos en utilización N_τ	Coeficiente de resistencia $l_\tau = \frac{N_\tau}{N_0}$
0	100 000	
1	100 000	1,00
2	99 000	0,99
3	98 000	0,98
4	97 000	0,97
5	96 000	0,96
6	93 000	0,93
7	87 000	0,87
8	77 000	0,77
9	63 000	0,63
10	48 000	0,48
11	32 000	0,32
12	18 000	0,18
13	10 000	0,10
14	6 000	0,06
15	3 000	0,03
16	2 000	0,02
17	1 000	0,01
18	0	0,00

La distribución presentada en la tabla puede también presentarse en forma de un histograma o diagrama. Véase la gráfica 8.

[11] Este ejemplo está tomado del libro de C. W. CHURCHMAN, E. L. ARNOFF y R. L. ACKOFF, *Introduction to Operations Research*, Nueva York, 1957, p. 493.

vación estadística, o bien en la contabilidad que se lleva a cabo en los establecimientos productivos se pueden formar tablas de distribución de los objetos para los diferentes tipos de capital fijo, de acuerdo con el tiempo de su utilización (el llamado tiempo de servicio) [10]. Dichas tablas también se llaman *tablas de persistencia*, puesto que demuestran el número de objetos que persistieron durante un tiempo de utilización determinado. Éstos se parecen a la clasificación de la población según la edad, exponen «la edad», es decir, el tiempo de utilización de los objetos (ejemplares) respecto

génea para todos los tipos de seguros. La cátedra de la teoría de la renovación la expone W. SAXER, *Versicherungsmathematik*, Berlín, 1955, parte I, cap. X; Berlín, 1958, parte II, cap. IV. En 1913 el economista inglés D. H. Robertson le prestó atención a la analogía que existía entre el proceso de renovación del capital productivo fijo y el proceso de renovación que existía en el estado de la población. Ver D. H. ROBERTSON, *Some Material for a Study of Trade Fluctuations*, «Journal of the Royal Statistical Society», 1913, así como también el mismo: *A Study of Industrial Fluctuations*, Londres, 1915, pp. 36-45. Por último, un destacado demógrafo y actuario, J. Lotka, aplicó la teoría matemática de la renovación del capital fijo productivo en su trabajo *Industrial Replacement*, «Skandinavisk Aktuarietidskrift», 1933. Ver también el trabajo del mismo autor *Contributions to the Theory of Self Renewing Aggregats with special Reference to Industrial Replacement*, «Annals of Mathematical Statistics», 1939. Esto abrió el camino para tratar el problema de la renovación del capital fijo con la ayuda de los métodos actuariales. Dicha concepción se difundió posteriormente. El resultado fue el desarrollo ulterior de la teoría de renovación; en relación a eso, ver M. FRECHET, *Les ensembles statistiques renouvellés et remplacement industriel*, París, 1949; L. KOZNIEWSKA, *Zagadnienia odnowienia* (Problemas de reposición), Varsovia, 1963; LANGE, *Teoria reprodukcji i akumulacji*, Varsovia, 1961, pp. 132-145 [traducción castellana: *Teoría de la reproducción y de la acumulación*]; A. J. BOJARSKI, *Matematiko-ekonomicheskiye ocherki*, Moscú, 1962, cap. IX. El estado contemporáneo de la teoría de la renovación está presentado por W. L. SMITH, *Renewal Theory and its Ramiffications*, «Journal of the Royal Statistical Society», Section B, 1958, y D. R. COX, *Renewal Theory*, Londres, 1962. La teoría de la renovación encuentra también su aplicación en la física nuclear, al investigar el proceso de la desintegración de los núcleos. La aparición y desaparición de partículas elementales durante la desintegración del núcleo constituye un proceso de renovación análogo al proceso de nacimiento y muerte. Uno de los primeros que tomaron en cuenta la significación de los métodos actuariales para la física nuclear fue el destacado estadista-economista Wladislaw Bortkiewich. Ver W. BORTKIEWICH, *Die radioaktiwe Strahlung als Gegenstand wahrscheinlichkeitstheoretischer Untersuchungen*, Berlín, 1913. Otro campo para la aplicación de la teoría de la renovación es la investigación de los procesos de renovación de las generaciones en las poblaciones biológicas, y, entre otras cosas, en las colonias de las bacterias productoras de las enfermedades en relación al medio de cultivo que éstas obtienen de la población humana (epidemiología), así como también en la acción recíproca que existe entre las diversas poblaciones biológicas (ecología). El destacado matemático V. Volterra fue pionero de estas investigaciones: *Leçons sur la théorie mathematique de la lutte pour la vie*, París, 1931. Sobre este tema ver M. BARTLETT, *Stochastic Population Models in Ecology and Epidemiology*, Londres, 1960.

[10] Aquí nos interesan los capitales productivos fijos. Las tablas de distribución de los objetos arregladas conforme al tiempo de su utilización pueden, sin embargo, aplicarse al capital de consumo (bienes de consumo), por ejemplo, para las casas-habitación, automóviles, etc.

del tipo de un capital fijo dado, en forma de una *tabla estadística de clasificación*. En la primera columna se indica el tiempo durante el cual dicho objeto es utilizado, o sea, su edad. En la segunda columna —está presentado— el número correspondiente de objetos. Lo ilustra la tabla 1, la cual presenta la distribución conforme al tiempo de utilización (por ejemplo, en semanas) de 100 000 focos instalados [11].

TABLA 1

DISTRIBUCIÓN DE LOS FOCOS SEGÚN EL TIEMPO DE SU UTILIZACIÓN
(Tabla de resistencia)

Edad (en semanas) τ	El número de focos en utilización N_τ	Coeficiente de resistencia $l_\tau = \frac{N_\tau}{N_0}$
0	100 000	
1	100 000	1,00
2	99 000	0,99
3	98 000	0,98
4	97 000	0,97
5	96 000	0,96
6	93 000	0,93
7	87 000	0,87
8	77 000	0,77
9	63 000	0,63
10	48 000	0,48
11	32 000	0,32
12	18 000	0,18
13	10 000	0,10
14	6 000	0,06
15	3 000	0,03
16	2 000	0,02
17	1 000	0,01
18	0	0,00

La distribución presentada en la tabla puede también presentarse en forma de un histograma o diagrama. Véase la gráfica 8.

[11] Este ejemplo está tomado del libro de C. W. CHURCHMAN, E. L. ARNOFF y R. L. ACKOFF, *Introduction to Operations Research*, Nueva York, 1957, p. 493.

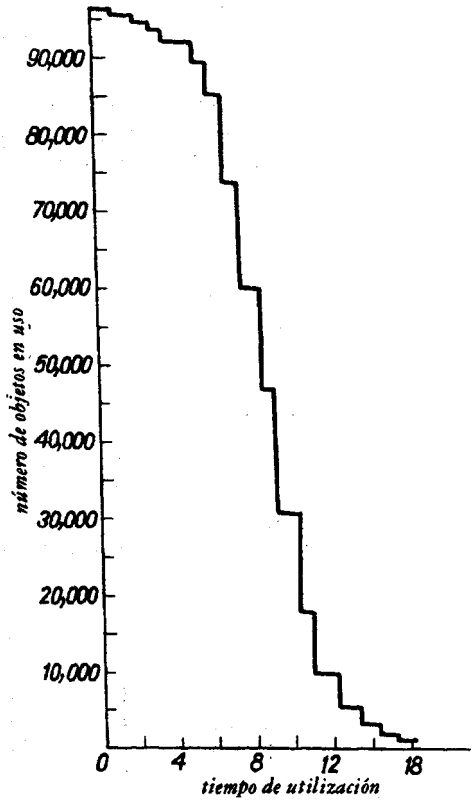


FIG. 8.
Gráfica de distribución de los focos, según el tiempo de utilización de éstos (gráfica de resistencia).

En la tabla 1 también está incluida una tercera columna que contiene la relación que existe entre el número de focos de una edad determinada y el número total de los focos instalados (que aquí es igual a 100 000 unidades). Tomando este hecho desde el punto de vista general, si el número de objetos instalados inicialmente es igual a N_0 y el número de objetos cuyo tiempo de utilización es igual a τ unidades de tiempo (por ejemplo, años, meses, semanas) es igual a N_τ, entonces la relación citada es

$$l_\tau = \frac{N_\tau}{N_0}. \tag{1}$$

Esta relación la denominamos *coeficiente de duración* del objeto, hasta el momento en que finaliza la edad de éste. Lo cual indica qué fracción de los objetos perdurará en utilización durante τ unidades de tiempo.

Como regla, el número de objetos utilizados durante un tiempo más largo, es menor que el número de los objetos utilizados durante un tiempo más corto. En otras palabras: el número de objetos más viejos es menor que el número de los objetos más recientes. Por la razón de que a la larga una parte de los objetos pierde su valor de uso. Sólo en casos excepcionales, cuando todos los objetos tienen exactamente el mismo período de utilización, el número de éstos no disminuye con la edad hasta el momento en el que, repentinamente, todos los objetos pierden su valor de uso al mismo tiempo. No obstante, si —como sucede generalmente— los objetos correspondientes se diferencian entre sí en cuanto a la duración del período de utilización de éstos, unos pierden su valor de uso antes que otros. Por consiguiente, hay menos objetos más viejos que los que tienen una edad más corta. Esto se hace evidente en la tabla 1, en forma de valores numéricos decrecientes que se encuentran en la segunda columna. De una manera correspondiente, también el coeficiente de duración decrece junto con el incremento del tiempo de utilización.

Como resultado, con el transcurso del tiempo de utilización sobreviene un decremento del número de los objetos utilizados. En la primera unidad de tiempo $(\tau + 1)$ este decremento es igual a $N_\tau - N_{\tau+1}$ objetos; lo cual también se puede presentar en forma de tabla de distribución. Esto está ilustrado en la tabla 2. En dicha tabla la primera columna muestra el tiempo de utilización, y la segunda el decremento que ocurre en las unidades subsecuentes del tiempo de utilización.

Esta tabla la denominamos *tabla de decremento*, o bien *tabla de eliminación* [12]. Ésta es similar a la tabla de mortandad (llamada también tabla de mortalidad) aplicada en la demografía. La tabla de eliminación se obtiene sobre la base de la tabla de duración, sustrayendo los valores en la segunda columna de dicha tabla.

[12] El término «tablas eliminatorias» fue introducido por S. SCHULC, *Metody statystyczne* (Métodos de estadística), Varsovia, 1961, cap. XIV. El primer conjunto de tablas de eliminación para los diversos tipos de capital productivo fijo fue declarado por E. B. KURTZ, *Life Expectancy of Physical Property*, Nueva York, 1930. En la teoría de la renovación las tablas eliminatorias se definen también como «orden de decremento» a imagen del «orden de mortandad», con cuyo nombre se denomina las tablas de mortandad en la demografía.

TABLA 2

TABLA DE PÉRDIDA (DE ELIMINACIÓN) DE LOS FOCOS EN EL TRANSCURSO DEL TIEMPO DE SU UTILIZACIÓN

Edad (en semanas) τ	Decremento $N_\tau - N_{\tau+1}$	Coeficiente de decremento $p_\tau = \frac{N_\tau - N_{\tau+1}}{N_0}$	Intensidad de decremento $m_\tau = \frac{N_\tau - N_{\tau+1}}{N_\tau}$
0	—	—	—
1	0	0,00	0,0000
2	1 000	0,01	0,0100
3	1 000	0,01	0,0101
4	1 000	0,01	0,0102
5	1 000	0,01	0,0103
6	3 000	0,03	0,0312
7	6 000	0,06	0,0645
8	10 000	0,10	0,1149
9	14 000	0,14	0,1818
10	15 000	0,15	0,2381
11	16 000	0,16	0,3333
12	14 000	0,14	0,4375
13	8 000	0,08	0,4444
14	4 000	0,04	0,4000
15	3 000	0,03	0,5000
16	1 000	0,01	0,3333
17	1 000	0,01	0,5000
18	1 000	0,01	1,0000

La relación que existe entre el decremento de los objetos que se opera en una unidad del tiempo de utilización de éstos y el número de objetos instalados inicialmente la llamamos *coeficiente de decremento* (o *coeficiente de eliminación*). Este coeficiente se determina mediante la fórmula

$$p_\tau = \frac{N_\tau - N_{\tau+1}}{N_0}. \tag{2}$$

Esta fórmula indica una fracción de los objetos instalados, que pierde el valor de uso entre la unidad de tiempo de utilización τ y $\tau + 1$ (es decir, durante una unidad de tiempo después de que éste había llegado al término de su edad). La tercera columna de la tabla 2 presenta los valores del coeficiente de eliminación para el con-

junto de los focos instalados. La figura 9 presenta una gráfica (histograma y diagrama) de estos valores.

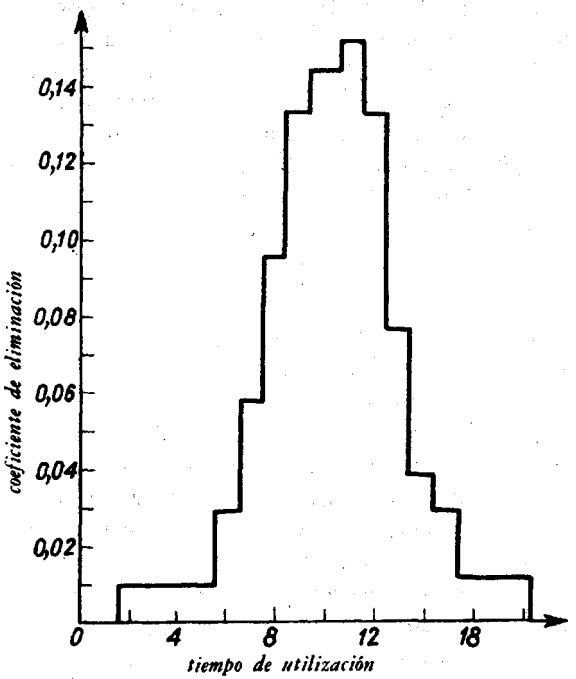


FIG. 9.
Diagrama de valores del coeficiente de eliminación.

Es conveniente enumerar las analogías demográficas de las magnitudes examinadas. En la demografía, al coeficiente de duración le corresponde el coeficiente de supervivencia, y al coeficiente de eliminación le corresponde el coeficiente de mortandad (mortalidad).

El coeficiente de duración y el coeficiente de eliminación pueden también interpretarse como probabilidades. Si en el conjunto de los objetos instalados llevamos a cabo un sorteo casual [13], entonces la probabilidad de que el objeto sorteado persista en su utilización durante τ unidades de tiempo es igual a la fracción de objetos instalados que perduran a través de τ unidades de tiempo, o sea, ésta es igual a l_τ. En cambio, la probabilidad de que el objeto

[13] Llamamos causal a un sorteo si en un gran número de sorteos cada objeto puede ser sorteado con la misma frecuencia.

sorteado decremente (es decir, pierda su valor de uso) al pasar de τ a $\tau + 1$ unidades de tiempo es igual a p_τ, o sea, a la fracción de objetos que pierden el valor de uso durante el período de tiempo mencionado. Por consiguiente, el coeficiente de duración y el coeficiente de eliminación también se definen con el nombre de *probabilidades de duración y probabilidades de eliminación.*

Junto al coeficiente (probabilidad) de eliminación, merece la atención también el coeficiente llamado *intensidad de decremento.* Éste se define como

$$m_\tau = \frac{N_\tau - N_{\tau+1}}{N_\tau}, \tag{3}$$

es decir, como una relación que existe entre la eliminación que tiene lugar durante la unidad de tiempo $(\tau + 1)$ y el número de los objetos que conservaron su valor de uso durante las unidades de tiempo τ. La intensidad de decremento puede interpretarse como una probabilidad de que el objeto que resistió durante τ unidades de tiempo pierda su valor de uso en el curso de la siguiente unidad de tiempo. En la demografía a este coeficiente le corresponde la intensidad con la que ocurren las muertes, la probabilidad de que el individuo que llegó a una edad determinada (por ejemplo, cincuenta años) muera en el curso del año siguiente (o sea, en el cincuenta y un año de su vida). La intensidad de decremento está señalada en la cuarta columna de la tabla 2. La gráfica correspondiente se encuentra en la figura 10.

Por lo regular, la intensidad de decremento aumenta con el tiempo durante el cual el objeto es utilizado, es decir, m_τ aumenta junto con τ. Mientras más viejo sea un objeto, mayor será la probabilidad de que éste pierda su valor de uso en el transcurso de la siguiente unidad de tiempo. De las fórmulas (1), (2), (3) dimana que

$$m_\tau = \frac{p_\tau}{l_\tau}, \tag{4}$$

es decir, que la intensidad de decremento es igual a la relación que existe entre el coeficiente de eliminación y el coeficiente de duración. El coeficiente de duración decrece al aumentar el tiempo de utilización τ, puesto que existen menos objetos viejos que nuevos. El caso antes citado constituye una excepción: cuando todos los objetos tienen exactamente el mismo período de utilización (en-

tonces durante todo el tiempo de utilización l_τ = const., $p_\tau = 0$, y también $m_\tau = 0$). Para que la intensidad de eliminación crezca junto con τ basta que p_τ decrezca más lentamente que l_τ. Comúnmente, sin embargo, el coeficiente de decremento p_τ crece por lo menos desde un límite inferior a un límite superior del valor τ, lo cual consolida más aún el incremento de m_τ. Los objetos muy nuevos pueden eliminarse en una cantidad relativa mayor (pueden tener un coeficiente de eliminación superior), a causa de los defectos de construcción, del material defectuoso, etc., lo que no sucede tratándose de los objetos más viejos, que ya han pasado una prueba más larga de utilización y, por consiguiente, constituyen un conjunto ya seleccionado de una manera adecuada. En cambio, los objetos muy viejos pueden eliminarse en una cantidad relativa menor, puesto que hay pocos, y los que llegaron al término se distinguen por una singular resistencia al desgaste. Aparte de esta propiedad especial de los objetos muy viejos o muy jóvenes, el coeficiente de eliminación crece junto con la edad del objeto.

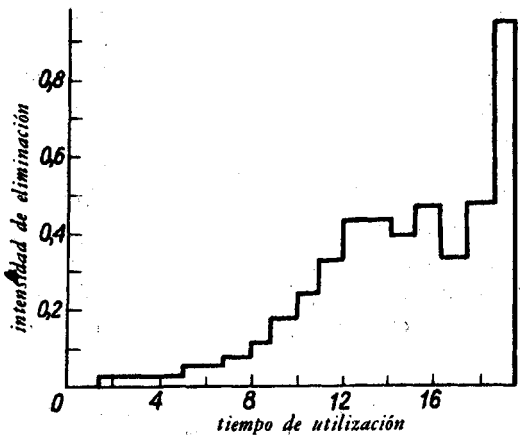


FIG. 10.
Intensidad de eliminación de los focos.

Como sabemos, los capitales fijos se desgastan por varias razones. El tiempo mismo de duración está vinculado con un deterioro gradual de dichos capitales; las condiciones atmosféricas (la lluvia, el viento, la humedad, los cambios de temperatura), cambios que se operan en el material (por ejemplo, la oxidación del hierro, desintegración del material de construcción), actúan en esa dirección.

Los capitales fijos también se desgastan durante el propio proceso de su utilización. En general, cuanto más viejo es el objeto dado, tanto más utilizado ha sido. Como resultado, los objetos más viejos tienen más probabilidad de perder su valor de uso que los objetos más jóvenes. Los objetos más viejos también tienen mayor probabilidad de perder el valor de uso en una siguiente unidad de tiempo, a causa de su obsoletismo económico, aun cuando son físicamente homogéneos con los objetos más jóvenes, puesto que al retirar los objetos de la utilización a consecuencia del obsoletismo económico de éstos, en primer término son retirados los objetos más viejos, que de todas maneras necesitarían en breve una renovación física. Todo esto hace que la intensidad de eliminación aumente simultáneamente con el tiempo de utilización de los objetos.

Por otra parte, los objetos pierden su valor de uso también a causa de los accidentes fortuitos: destrucciones, averías que no se pueden (o no es costeable) componer mediante una reparación. Los casos fortuitos generalmente afectan a los objetos independientemente de su edad. En este caso la intensidad de eliminación a consecuencia de los accidentes fortuitos puede constituir una magnitud constante, independiente del tiempo de su utilización. Esto, sin embargo, no altera el resultado general del hecho de que la intensidad de eliminación, que es efecto conjunto de las causas citadas aquí, aumenta junto con el tiempo de utilización de los objetos [14]. Además, aun cuando los casos fortuitos afecten a los objetos respectivos independientemente de la edad de éstos, el daño causado puede depender de la edad del objeto. Es más fácil que los objetos más viejos sufran un deterioro o una avería irreparable a consecuencia de un accidente que los objetos más nuevos, y por la

[14] A. BOJARSKI (*Matematiko-ekonomicheskiye ocherki*, ed. cit., pp. 238-240) afirma que los objetos pierden su valor de uso, ya sea a causa de un accidente fortuito, o por causas vinculadas al tiempo de utilización de éstos. En vista de eso, la intensidad de eliminación puede dividirse en dos elementos: $m_\tau = m'_\tau + m''_\tau$. El primer elemento representa el efecto de los accidentes fortuitos y constituye una magnitud constante, en tanto que el otro elemento crece junto con τ. El resultado m_τ también crece simultáneamente con τ. Bojarski expone ejemplos de situaciones especiales en que los objetos prácticamente no se desgastan, sino que pierden su valor de uso solamente a causa de accidentes fortuitos; por ejemplo, los utensilios de cocina en los centros de alimentación colectiva, las vitrinas, los instrumentos de diversos tipos. En estos casos $m''_\tau = 0$ y la intensidad de eliminación está determinada exclusivamente por la probabilidad de accidentes fortuitos. Sin embargo, estas situaciones realmente son atípicas y afectan solamente a una categoría muy alta de los capitales fijos.

misma razón, un determinado caso fortuito hace necesario retirar estos objetos del uso.

Con la ayuda de una tabla puede calcularse el número conjunto de los objetos que pierden su valor de uso en una unidad de tiempo. Este número constituye suma de decrementos de objetos introducidos a la utilización en un tiempo anterior, los cuales hayan perdurado hasta cierta unidad del tiempo, y precisamente durante dicha unidad pierden su valor de uso. Designemos por medio de t la unidad de tiempo que nos interesa; para simplificar llamémosla un año (en realidad, puede ser un año, un trimestre, un mes, una semana, etc.). Este es un año cualquiera que por ciertas razones nos interesa: puede ser este año, el siguiente, el último año del plan quinquenal o cualquier otro año. Para simplificar daremos por supuesto que los objetos duran un período redondo de años, por ejemplo, 1, 2, 3, ...años; también supondremos que existe un margen superior de duración de los objetos que es igual a ω años. En el año t existen, por consiguiente, objetos que fueron introducidos al uso hace un año, hace dos años, hace tres años y antes hace ω años, o sea, $t-1, t-2, t-3, \ldots, t-\omega$. No hay objetos más viejos, puesto que éstos ya habían sido retirados del uso. Designemos por medio de $N_0(t-1)$ el número de objetos introducidos en el año $t-1$; mediante $N_0(t-2)$ el número de objetos introducidos en el año $t-2$, etc.; finalmente, mediante $N_0(t-\omega)$ el número de objetos introducidos en el año $t-\omega$. Calculamos el decremento de los objetos en el año t de la siguiente manera. Entre los objetos introducidos hace un año pierden su valor de uso $N_0(t-1)p_1$; entre los objetos introducidos hace dos años $N_0(t-2)p_2$, etc., y, finalmente, entre los objetos introducidos hace ω años pierden su valor de uso $N_0(t-\omega)p_\omega$. Aquí $p_1, p_2, \ldots, p_\omega$ representan el coeficiente de eliminación después de un año, después de dos años, ..., después de ω años de acuerdo con la definición dada en la fórmula (2). El decremento conjunto en el año t es, por consiguiente, igual a

$$N_0(t-1)p_1 + N_0(t-2)p_2 + \ldots + N_0(t-\omega)p_\omega .$$

Para mantener la reserva de un capital fijo dado en estado intacto debe renovarse en el año t un número de objetos que son retirados del uso, o sea, un número de objetos igual a la suma arriba citada. Por medio de $N_0(t)$ designamos el número de los objetos introducidos en el año t; este número tiene que ser igual al nú-

mero conjunto de los objetos que se eliminan en el curso de dicho año, es decir,

$$(5) \qquad N_0(t) = N_0(t-1)p_2 + N_0(t-2)p_3 + \ldots + N_0(t-\omega)p_\omega \quad (t \geqslant \omega).$$

Esta condición determina el número de objetos que deben renovarse durante un año respectivo (o durante otra unidad de tiempo) para igualar el decremento de los objetos que están perdiendo su valor de uso. Dicha condición se denomina *ecuación de la renovación* [15]. Esta es una ecuación que tiene carácter recurrente, per-

TABLA 3

NÚMERO DE REPOSICIONES DE LOS FOCOS EN LAS SUBSECUENTES UNIDADES DE TIEMPO

Unidad de tiempo t en semanas	Número de reposiciones $N_0(t)$	Unidad de tiempo t en semanas	Número de reposiciones $N_0(t)$
1	0	21	12,047
2	1 000	22	11,706
3	1 000	23	10,820
4	1 010	24	9,697
5	1 020	25	8,700
6	3 030	26	8,288
7	6 040	27	8,413
8	10 090	28	8,862
9	14 201	29	9,523
10	15 392	30	10,100
11	16 665	31	10,413
12	15 000	32	10,503
13	9 480	33	10,348
14	6 174	34	9,999
15	6 160	35	9,636
16	5 521	36	9,079
17	7 309	37	9,220
18	9 317	38	9,271
19	10 181	39	9,447
20	11 529	40	9,669
Para $t \longrightarrow \infty$ es $N_0(t) = 9{,}709$			

[15] El análisis más detallado de esta ecuación se encuentra en el apéndice *Análisis matemático del proceso de la renovación.*

mite determinar el número de renovaciones que tendrán lugar consecutivamente en los años t, $t + 1$, $t + 2$, etc. [16].

Aplicando la ecuación de la renovación a los datos contenidos en la tabla 2, es decir, en la tabla de eliminación de los focos, obtenemos los números de las renovaciones de éstos en las subsecuentes unidades de tiempo, como en la tabla 3.

La figura 11 contiene el diagrama del número de reposiciones que aparecen en la tabla 3.

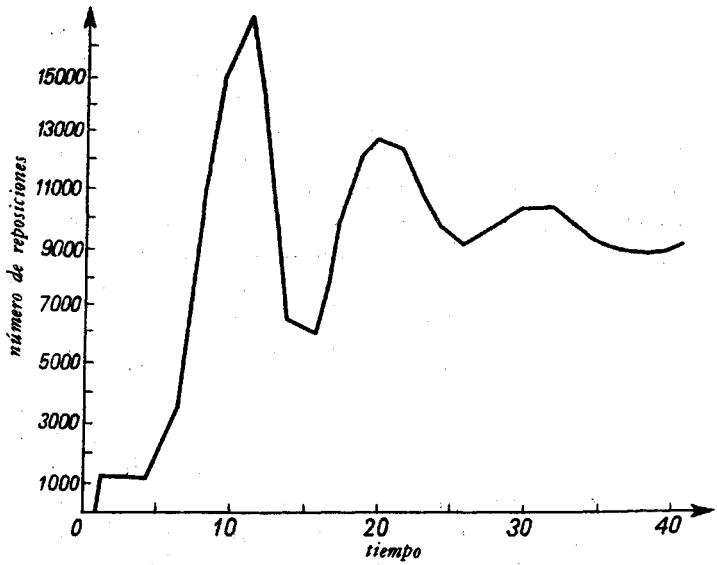


FIG. 11.
El número de reposiciones de los focos en las subsecuentes unidades de tiempo.

[16] Aceptamos que $t \geqslant \omega$, o sea, que el proceso de renovación se encuentra «en plena marcha». Si los primeros objetos fueron introducidos en el año $t = 0$, entonces para el valor $t < \omega$ la ecuación se presenta en una forma «abreviada», porque en el año $t = 1$ los objetos más viejos tienen un año de edad, en el año $t = 2$ tienen dos años de edad, etc. En consecuencia, para los años que corresponden a $t = 1, 2, \ldots, \omega$ la ecuación de la renovación está «recortada». Consecutivamente, ésta es igual a:

$$N_0(1) = N_0(0)p_1,$$
$$N_0(2) = N_0(1)p_1 + N_0(0)p_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$N_0(\omega - 1) = N_0(\omega - 2)p_1 + N_0(\omega - 3)p_2 + \ldots + N_0(0)p_{\omega-1}.$$

Estas son las llamadas condiciones iniciales, que determinan la «puesta en marcha» del proceso de la renovación.

Resulta que en ciertas condiciones el número de reposiciones está sometido a unas oscilaciones regulares que tienen carácter cíclico. Dichas oscilaciones aparecen claramente en la tabla 3 y en la figura 11. Con el propósito de explicar las fuentes de esas oscilaciones, examinaremos primero el caso que antes habíamos determinado como excepcional. En él, todos los objetos tienen el mismo período de utilización. Digamos que en el año de partida son introducidos al uso cien objetos y que todos los objetos tienen el período de utilización de cinco años exactamente. Entonces durante los cinco años no existe ninguna necesidad de reposición, mientras que al concluirse el plazo de cinco años es necesario renovar los cien objetos. Durante los siguientes cinco años otra vez no se renuevan éstos; en cambio, después de quince años hay que renovar todos los objetos, etc. Aquí se manifiesta un *ciclo de renovación o ciclo de restitución* de cinco años, como se le denomina algunas veces. Este ciclo opera por saltos: durante cinco años no existe renovación alguna, después se renuevan todos los objetos simultáneamente. Generalmente, si el período de renovación es igual a ω años, el período (la duración) del ciclo de renovación es igual a ω años, es decir, a tantos años como dura el período de utilización de los objetos. Cada ω años se renuevan todos los objetos, y entre tanto no se renueva o se repone ninguno [17].

El ciclo de renovación es resultado de la concentración que existe durante el tiempo de la introducción inicial de objetos nuevos. Esta concentración, en los intervalos regulares de tiempo (ω años), causa otra concentración de introducción de objetos nuevos, porque el retiro de los objetos del uso también constituye una concentración en el tiempo. La nueva concentración en cierta forma es como un «eco» de la concentración originaria de la introducción de nuevos objetos. Un fenómeno similar nos es conocido en la demografía con el nombre de «eco» precisamente. Son conocidas las olas demográficas, altas y bajas. Si, por ejemplo, en tiempo de guerra sobreviene una disminución concentrada de nacimientos, así, después de unos veintitantos años (cuando las personas nacidas en aquel tiempo llegan a la edad reproductora), ocurre una baja demográfica que se repite cada veintitantos años. De la misma ma-

[17] En la ecuación de la renovación esto significa que $p_1 = p_2 = \ldots p_{\omega-1} = 0$ y $p_\omega = 1$ (puesto que al cabo de los años todos los objetos salen del uso). En este momento la ecuación de la renovación toma la forma de $N_0(t) = N_0(t - \omega)$, lo que precisamente expresa el carácter cíclico del proceso de renovación, y, al mismo tiempo, el período del ciclo es igual a ω años.

nera, si, por ejemplo, inmediatamente después de la guerra ocurre un incremento concentrado de nacimientos, cada veintitantos años se repite el «eco» de esto en forma de un alza demográfica.

Para que el proceso de renovación transcurra de una manera uniforme sin el ciclo es necesario que la introducción de nuevos objetos desde el mismo principio sea distribuida uniformemente en el tiempo. En las condiciones que existen en el ejemplo citado hay que empezar por introducir veinte objetos durante el primer año, al año siguiente hay que introducir de nuevo veinte objetos, en el tercer año veinte objetos más, etc. Después de cinco años tenemos entonces cien objetos en uso y, al mismo tiempo, cada año veinte objetos salen del uso y son renovados. Este tipo de proceso uniforme de renovación está presentado en la tabla 4.

TABLA 4

PROCESO UNIFORME DE RENOVACIÓN

Año	Edad de los objetos expresada en años					Número de objetos que se renuevan
	1	2	3	4	5	
1	20					
2	20	20				
3	20	20	20			
4	20	20	20	20		
5	20	20	20	20	20	
6	20	20	20	20	20	20
7	20	20	20	20	20	20
8	20	20	20	20	20	20
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.

En la parte central de la tabla están presentados los números de los objetos de distintas edades que existen año por año. Las líneas oblicuas muestran el proceso de transición del objeto, al final de cada año, a una clase más alta en cuanto a su edad, o sea, el proceso de envejecimiento de los objetos. La última columna del lado derecho está, por lo tanto, construida de una manera semejante a las tablas de envejecimiento de la población aplicadas

en la demografía [18]. Como se ve en la tabla, son necesarios cinco años para iniciar un proceso uniforme de renovación. Después de cinco años el proceso uniforme se encuentra «en marcha»; la reserva de los objetos que están constantemente en uso es igual a 100, y 20 objetos que pertenecen a esta reserva, o sea, una quinta parte de éstos, está anualmente sometida a la renovación. Generalmente, si el período de utilización (el mismo para todos los objetos) es de ω años, entonces la iniciación de un proceso uniforme de renovación también requiere ω años. Si la reserva existente de los objetos es igual a N, entonces durante ω años es necesario introducir al uso $\frac{N}{\omega}$ objetos anualmente. Posteriormente a eso el proceso de renovación se vuelve uniforme: cada año se renuevan $\frac{N}{\omega}$ objetos, es decir, se renueva un número de objetos igual a la reserva dividida por el período de la utilización del objeto [19].

La concentración que existe durante el tiempo de introducción de nuevos objetos ocasiona un ciclo de renovación también en el caso cuando el período de utilización de los objetos correspondientes es diferente [20]. Esto se nota en la tabla 3 y en la figura 11. No obstante, en un caso que se corresponde con la mayoría de los procesos de renovación que se encuentran en la práctica, las fluctuaciones (oscilaciones) del ciclo disminuyen con el tiempo y el proceso de renovación se vuelve uniforme asintomáticamente. Con

[18] En la demografía el proceso de envejecimiento y mortandad de la población se representa por medio de líneas rectas oblicuas, las cuales, junto con las coordenadas forman la llamada red demográfica. Ver J. HOLZER, *Podstawy analizy demograficznej* (Bases del análisis demográfico), Varsovia, 1963, pp. 39-45. Esta manera de presentación gráfica fue introducida en la demografía por G. ZEUNER, *Abhandlungen zur mathematischen Statistik*, Leipzig, 1869; G. F. KNAPP, *Theorie des Bevölkerungswechsel*, Brunswik, 1874, y W. LEXIS, *Einleitung in die Theorie des Bevölkerungsstatistik*, Estrasburgo, 1875. Ver también W. LEXIS, *Abhandlung zur Theorie der Bevölkerung- und Moralstatistik*, Jena, 1903. La tabla 4 y las tablas 6 y 8, que contienen unas líneas oblicuas similares, están construidas de acuerdo con el mismo principio que la red demográfica.

[19] Es conveniente recordar las dimensiones de estas magnitudes. La cantidad de objetos que se encuentran en uso constituye una reserva, la dimensión de ésta (en unidades naturales) la designamos por medio de N. El período de utilización ω tiene la dimensión del tiempo T. El número de objetos renovados en una unidad de tiempo tiene, por consiguiente, la dimensión NT^{-1}, es decir, tiene carácter de flujo.

[20] T. CZECHOWSKI, *Cykliczność procesu reprodukcji prostej* (La cíclica del proceso de reproducción simple), «Zeszyty Naukowe Szkoly Glównej Planowania i Statystyki» («Cuadernos Científicos de la Escuela Principal de Planificación y Estadística»), Varsovia, 1957.

el transcurso del tiempo, como decimos, el ciclo de renovación se extingue, sus oscilaciones son reprimidas y, finalmente, se extinguen; se opera la *estabilización del proceso de renovación.*

TABLA 5

EXTINCIÓN DEL CICLO DE RENOVACIÓN DESPUÉS DE INTRODUCIR 10 000 OBJETOS DE UNA SOLA VEZ

Año	Número de objetos introducidos recientemente	El número de objetos introducidos después de		
		1 año	2 años	3 años
1	10 000	1 000	3 000	6 000
2	1 000	100	300	600
3	3 100	310	930	1 860
4	6 610	661	1 983	3 966
5	2 191	219	657	1 315
6	4 062	406	1 219	2 437
7	5 029	503	1 509	3 017
8	3 037	304	911	1 822
9	4 250	425	1 275	2 550
10	4 353	435	1 306	2 612
11	3 532	353	1 060	2 119
12	4 209	421	1 263	2 525
13	4 093	409	1 228	2 456
14	3 791	379	1 137	2 265
15	4 132	413	1 240	2 479
16	4 006	401	1 202	2 403
17	3 906	391	1 172	2 343
18	4 082	408	1 225	2 449
19	3 983	398	1 195	2 390
20	3 966	397	1 180	2 360
21	4 041	404	1 212	2 425
22	3 974	397	1 192	2 384
23	3 969	397	1 191	2 281
24	4 014	401	1 204	2 409
25	3 967	397	1 190	2 380
.	4 000	400	1 200	2 400
.	4 000	400	1 200	2 400
.	4 000	400	1 200	2 400
.	4 000	400	1 200	2 400
.	4 000	400	1 200	2 400
.	.	.	.	

Para una mejor ilustración de la extinción del ciclo de renovación construimos el siguiente ejemplo simplificado. Damos por supuesto que en el año inicial son introducidos simultáneamente 10 000 nuevos objetos y que el 10 por 100 de éstos requiere renovación después del primer año, el 30 por 100 después del segundo año y el 60 por 100 después del tercer año. El período más acentuado de utilización del objeto es, por consiguiente, $\omega = 3$ años, y el coeficiente de eliminación toma el valor de $p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}3$, $p_3 = 0{,}6$. El transcurso del ciclo de la renovación está presentado en la tabla 5.

La columna izquierda (anterior a la línea vertical) de la tabla 5 presenta los números de los nuevos objetos introducidos cada año; las siguientes columnas presentan cuántos de estos objetos son renovados después de un año, cuántos después de dos años y cuántos después de tres años. El número de objetos renovados cada año constituye una suma del número de los objetos introducidos en los tres años anteriores, que tenían que renovarse después de un año, de dos años y después de tres años. La tabla lo ilustra por medio de líneas oblicuas que unen los objetos introducidos hace un año, hace dos años y hace tres años, los cuales requieren renovación. Por ejemplo, el número 6 610 de nuevos objetos que existen en el cuarto año constituye una suma de 310 objetos introducidos el año anterior y que ya tenían que renovarse, 300 objetos introducidos hace dos años que requerían renovación, así como también 600 objetos introducidos hace tres años que actualmente están llegando a su fin.

La tabla muestra una estabilización gradual del proceso de renovación. El proceso de renovación tiende a convertirse en un proceso uniforme, en el que anualmente se renuevan 4 000 objetos. La coincidencia es asintótica; sin embargo, ya a partir del vigésimo segundo año de oscilación los números de los objetos en renovación no sobrepasan el 1 por 100 del número de los objetos renovados en el proceso uniforme. Por consiguiente, puede considerarse que, empezando desde el vigésimo segundo año, el proceso de renovación se vuelve prácticamente uniforme. Dando por supuesto como criterio de la uniformidad práctica del proceso de la renovación las oscilaciones que no sobrepasan el 1 por 100 en el ejemplo de la renovación de los focos, en la tabla 3, el proceso de renovación se hace prácticamente uniforme a partir de la trigésima sexta unidad del tiempo (una semana).

El proceso de envejecimiento y eliminación de los objetos que

TABLA 6

EL PROCESO DE ENVEJECIMIENTO Y ELIMINACIÓN DE LOS OBJETOS

Año	Tiempo de utilización (la edad alcanzada) de los objetos presentada en años		
	1	2	3
1	10 000	—	—
2	1 000	9 000	—
3	3 100	900	6 000
4	6 610	2 790	600
5	2 191	5 949	1 860
6	4 062	1 972	3 966
7	5 029	3 652	1 315
8	3 037	4 526	2 437
9	4 250	2 733	3 017
10	4 353	3 825	1 822
.		3 918	2 550
			2 612
.	4 000	3 600	2 400
.	4 000	3 600	2 400
.	4 000	3 600	2 400
.	4 000	3 600	2 400
.	4 000	3 600	2 400
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

corresponde a nuestro ejemplo está presentado en la tabla 6. De los 10 000 objetos introducidos en el primer año, sólo 9 000 se utilizan en el segundo año y solamente 6 000 en el tercer año. Las líneas oblicuas muestran la transición de los objetos a una clase superior de edad al final de cada año. La tabla 6 se asemeja a la tabla 4, en que también presenta el proceso de envejecimiento de los objetos. No obstante, en la tabla 6 los objetos respectivos tienen un diferente período de utilización y, por lo tanto, no todos los objetos pasan a la siguiente categoría de edad (lo que tiene lugar en la tabla 3); una parte de los objetos se elimina. El número de los objetos eliminados durante la transición a la siguiente categoría de edad es igual a la diferencia que existe entre las cifras subsecuentes que se encuentran en la línea oblicua. Los números de los objetos eliminados durante la transición a una clase superior de

edad están ilustrados en las líneas horizontales de la tabla 5. Conviene tomar en cuenta que cuando el proceso de renovación se estabiliza, el número de objetos que son eliminados cada año es diferente, de una manera similar a los números de los objetos que pasan a las categorías de las edades correspondientes. En nuestro ejemplo cada año son introducidos 4 000 objetos, 400 de ellos se eliminan después de un año y sólo 3 600 pasan a la siguiente clase de edad; después del segundo año de vida se eliminan 1 200 más y a la última categoría de edad pasan solamente 2 400 objetos.

La extinción del ciclo de renovación constituye un resultado de las desigualdades que existen entre los períodos de utilización de los objetos respectivos. En el caso de que todos los objetos tengan el mismo período de utilización, el ciclo de la renovación transcurre de una manera no menguada, se repite continuamente en las mismas dimensiones. En cambio, tal como hemos observado, puede eludirse el ciclo de renovación y se puede asegurar la uniformidad del proceso de la renovación por medio de llevar a cabo una distribución uniforme al introducir nuevos objetos (ver la tabla 4). Puesto que los objetos correspondientes tienen diferentes períodos de utilización, a pesar de la concentración inicial que existe durante la introducción de nuevos objetos —una introducción ulterior de éstos, causada por la necesidad de renovación— con el tiempo se hace más uniforme. Los objetos introducidos en un año inicial no todos son renovados simultáneamente. A consecuencia de eso, en los años posteriores, la introducción de nuevos objetos es menos concentrada en el tiempo; está distribuida de una manera más uniforme. Los períodos desiguales de la utilización de todos los objetos respectivos causan una desconcentración ulterior durante la introducción de objetos nuevos, etc. De esa manera la introducción de nuevos objetos se está distribuyendo en el tiempo de un modo cada vez más uniforme, las oscilaciones del ciclo de renovación se hacen cada vez menores, hasta que, finalmente, el proceso de la renovación se vuelve uniforme (asintótico). El «eco» de la concentración inicial de introducción de nuevos objetos se hace cada vez más débil, cada vez menos perceptible, hasta que gradualmente desaparece.

Mientras mayor sea la desigualdad que existe entre los períodos de utilización de los objetos correspondientes, más sofocado es el ciclo de la renovación de éstos y más rápidamente se estabiliza el proceso de renovación. Es evidente que si los períodos de utilización se diferencian poco entre sí, la renovación está muy concen-

trada en el tiempo, y se necesita un período más largo para que las diferencias que existen entre los períodos de utilización disminuyan esta concentración y conduzcan hacia una uniformidad mayor durante la introducción de nuevos objetos. En cambio, si los períodos de utilización de los objetos son muy diferentes, la desconcentración se opera con gran rapidez al introducir objetos nuevos; el ciclo de la renovación es, en este caso, fuertemente sofocado y se extingue pronto. Los períodos de utilización de los objetos respectivos se arreglan —como se sabe— de acuerdo con el sistema estadístico de distribución, cuya expresión constituye la tabla de eliminación, la cual demuestra cuántos objetos pierden el valor de uso después de un determinado tiempo de su utilización. La desigualdad que existe entre los objetos correspondientes puede medirse, por consiguiente, mediante el sistema estadístico de dispersión; por ejemplo, por medio de variaciones o bien de desviación media tipo «standard». La magnitud de las variaciones o de la desviación media determina el grado de sofocación y la rapidez de la extinción del ciclo de la renovación [21].

Como el ciclo de la renovación es resultado de la concentración inicial que existe durante la introducción de nuevos objetos, por la misma razón éste puede eludirse mediante una distribución uniforme durante la introducción inicial de los objetos nuevos. La ta-

TABLA 7

LA INICIACIÓN DE UN PROCESO UNIFORME DE RENOVACIÓN

Año	Número de nuevos objetos	El número de objetos renovados después de		
		1 año	2 años	3 años
1	4 000	400	1 200	2 400
2	4 000	400	1 200	2 400
3	4 000	400	1 200	2 400
4	4 000	400	1 200	2 400
5	4 000	400	1 200	2 400
6	4 000	400	1 200	2 400
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

[21] Los detalles se discuten en el apéndice *Análisis matemático del proceso de renovación.*

bla 7 ilustra cómo —en las condiciones en que se desarrolla nuestro ejemplo— hay que distribuir en el tiempo la introducción de nuevos objetos para que no se origine un ciclo de renovación. Resulta que es necesario introducir 4 000 objetos cada vez durante los primeros tres años. En este caso, después de los tres años, la reserva de los objetos es igual a 10 000. En el transcurso de tres años conjuntamente serán introducidos 12 000 objetos, de los cuales 400 se eliminarán después de un año, 1 600 objetos después de dos años, y como resultado, quedarán en uso 10 000 objetos. Después de tres años un proceso uniforme de renovación estará en «marcha», y cada año se renovarán 4 000 objetos.

En un proceso uniforme de renovación cada año (o en cualquier otra unidad de tiempo) el mismo número de objetos pierde su valor de uso y es renovado. Según nuestro ejemplo, éste será igual a 4 000 objetos anualmente; en el ejemplo arriba presentado de renovación de los focos son 9 709 focos los que se reponen en el transcurso de una semana. Este número es igual a una determinada fracción de reserva existente de objetos, o sea, reserva de los objetos dividida entre el *período medio de utilización de los objetos*. En el ejemplo citado en la tabla 5 la reserva de los objetos es igual a 10 000. Entre dichos objetos, el 10 por 100 de ellos, es decir, 0,1, es utilizado durante un año; el 30 por 100, o sea, 0,3, durante dos años, y el 60 por 100, o sea, 0,6, durante tres años. El período medio de utilización es de $0{,}1 \cdot 1 + 0{,}3 \cdot 2 + 0{,}6 \cdot 3 = 2{,}5$ años. Cada año se somete a renovación $\frac{1}{2{,}5}$ parte de la reserva existente, es decir, 400 objetos. En el ejemplo de la renovación de los focos presentado en la tabla 3 el período medio de utilización es igual a 10,3 por semana, según lo cual cada semana se repone $\frac{1}{10{,}3}$ parte de la reserva de los 100 000 focos, o sea, 9 709.

El siguiente razonamiento lo explica más detalladamente. En un proceso uniforme de renovación el número de nuevos objetos introducidos cada año (o en otra unidad de tiempo) es la misma. La reserva de los objetos existentes tampoco varía de año en año, y la designaremos por medio de N. En el año t, elegido libremente, esta reserva se compone de los objetos introducidos en los años $t-1$, $t-2$, ..., $t-t_1$, los cuales han llegado al año t (los objetos introducidos ya han perdido su valor de uso antes). El número conjunto de dichos objetos es igual a $N_0(t-1)/_1 +$

$+ N_0(t-2)l_2 + \ldots + N_0(t-\omega)l_\omega$, donde $N_0(t-1)$, $N_0(t-2)$, etcétera designan el número de objetos introducidos hace un año, hace dos años, etc., y l_1, l_2, etc. designan los coeficientes de duración de estos objetos durante un año, dos años, etc. Así que tenemos

$$N = N_0(t-1)\,l_1 + N_0(t-2)\,l_2 + \ldots + N_0(t-\omega)\,l_\omega.$$

Sin embargo, en un proceso de renovación uniforme el número de objetos introducidos durante cada año es el mismo, o sea,

$$N_0(t) = N_0(t-1) = N_0(t-2) = \ldots = N_0(t-\omega).$$

En vista de eso, la igualdad arriba presentada se puede escribir en forma de

$$N = N_0(t)\,(l_1 + l_2 + \ldots + l_\omega),$$

de ahí que

$$N_0(t) = \frac{N}{l_1 + l_2 + \ldots + l_\omega}. \tag{6}$$

Este modelo determina un número de nuevos objetos $N_0(t)$ introducidos en el año libremente elegido t. Como lo demuestra el lado derecho de la fórmula, este número no depende de t, sino que es igual en todos los años.

El denominador que aparece en la fórmula arriba citada representa el período medio de utilización de los objetos. Efectivamente, si la reserva de los objetos existentes es igual a N, el tiempo conjunto de su utilización es $Nl_1 + Nl_2 + \ldots + Nl_\omega$. Dividiendo el tiempo conjunto de utilización entre el número de los objetos existentes, o sea, entre N, obtenemos el período medio de utilización, que es igual a $l_1 + l_2 + \ldots + l_\omega$. Resulta que el número de objetos que se reponen cada año es igual a la reserva de los objetos existentes divididos entre el período medio de su utilización.

El período medio de utilización de los objetos es igual a la edad promedia de los objetos que pierden su valor de uso, o sea, $p_1 + 2p_2 + \ldots + \omega p_\omega$. De la definición del coeficiente de eliminación [fórmula (2) arriba presentada] se deduce que $p_\tau = l_\tau - l_{\tau+1}$, o sea, $l_\tau = p_\tau + l_{\tau+1}$. Así que tenemos $l_1 = p_1 + l_2$, $l_2 = p_2 + l_3$, $\ldots$, $l_\omega = p_\omega + l_{\omega+1} = p_\omega$ (puesto que $l_{\omega+1} = 0$, porque no existen objetos más viejos que los que tienen ω años). Intercalando consecutivamente estas relaciones en las expresiones para l_1, l_2, $\ldots$, l_ω obtenemos

$$
\begin{aligned}
l_1 &= p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_\omega, \\
l_2 &= \quad p_2 + p_3 + \ldots + p_\omega, \\
l_3 &= \quad\quad p_3 + \ldots + p_\omega, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
l_\omega &= \quad\quad\quad\quad p_\omega.
\end{aligned}
$$

El coeficiente de duración hasta el fin de la edad determinada es, por consiguiente, igual a la suma de los coeficientes de eliminación después de haber llegado a dicha edad. Esto es claro por la razón de que cuando el objeto llega a una edad determinada ello equivale al hecho de que su eliminación se producirá durante alguno de los años próximos. Sumando las igualdades arriba presentadas, encontramos que

$$
(7) \qquad l_1 + l_2 + \ldots + l_\omega = p_1 + 2p_2 + \ldots + \omega p_\omega .
$$

Al introducirla en la fórmula (6) obtenemos

$$
(8) \qquad N_0(t) = \frac{N}{p_1 + 2p_2 + \ldots + \omega p_\omega},
$$

es decir, el número de objetos que son renovados durante cualquier año es igual a la reserva de los objetos existentes, dividida entre la edad media de los objetos que pierden su valor de uso.

La inversa, del período medio de utilización, o bien (lo que es lo mismo) el período medio de los objetos que salen del uso, la llamaremos *cuota media de desgaste* [22]. Lo designaremos por medio de s, o sea,

$$
(9) \qquad s = \frac{1}{l_1 + l_2 + \ldots + l_\omega} = \frac{1}{p_1 + 2p_2 + \ldots + \omega p_\omega}.
$$

Por consiguiente, la fórmula (6) puede escribirse en forma simplificada:

$$
(10) \qquad N_0(t) = Ns.
$$

En un proceso uniforme de renovación el número de objetos que se restituyen cada año (en cada unidad de tiempo) es igual, por

[22] Ver el capítulo 1, pp. 58-60.

consiguiente, a la reserva de los objetos existentes multiplicada por la cuota media de desgaste. En el ejemplo examinado arriba (tabla 5) la cuota media de desgaste es $s = \frac{1}{2,5} = 0,4$, $N = 10\,000$; de allí $N_0(t) = 4\,000$, cuando el proceso de renovación se convierte en un proceso uniforme. De manera similar, en el ejemplo presentado en la tabla 3 tenemos $s = \frac{1}{10,3} = 0,09709$, así como también $N(t) = 9\,709$ en el proceso uniforme de la renovación.

Para iniciar un proceso uniforme de renovación en el transcurso de los primeros ω años es necesario cada vez introducir al uso Ns de nuevos objetos. Entonces, como hemos visto, después de ω años, el proceso uniforme de la renovación está en «marcha», y la reserva de los objetos alcanza el nivel N. Esto requiere una planificación adecuada para la introducción de nuevos objetos durante el período de ω años. En ausencia de este tipo de planificación, puede surgir el ciclo de renovación, y si la falta de uniformidad (dispersión) de los períodos de utilización de los objetos respectivos es insignificante, dicho ciclo se extingue lentamente. En nuestro ejemplo (tabla 5) son necesarios veintidós años para que el ciclo de renovación se extinga prácticamente (es decir, que las oscilaciones lleguen a ser menores que el 1 por 100). Esto tiene lugar cuando el período medio de utilización de los objetos es igual a 2,5 años y $\omega = 3$ años. Si se acepta que el período medio de utilización es de 25 años y $\omega = 30$ años, lo que está bastante cerca de la realidad en los países industrialmente desarrollados, entonces en las proporciones establecidas en la tabla serían necesarios 220 años para que el ciclo de renovación se extinguiese en la práctica. Es evidente que ya mucho antes las oscilaciones del ciclo de renovación pierden hasta cierto punto su significación práctica, porque es imposible distinguirlas de todo tipo de perturbaciones casuales; por ejemplo, en la tabla 5, después de once años, ya éstas no llegan al 4 por 100. No obstante, a pesar de todo, a falta de una planificación adecuada, los ciclos de renovación pueden resultar persistentes. Sin embargo, éstos se extinguen finalmente, y después de un tiempo suficientemente largo, los procesos de renovación se estabilizan [23]. El caso

[23] Damos por supuesto que en el transcurso del proceso de renovación no aparecen las concentraciones reiteradas de introducción de nuevos objetos, debido a causas externas al proceso de renovación. Tales concentraciones se presentan de una manera regular en la economía capitalista respecto al ciclo

particular citado arriba constituye una excepción cuando todos los objetos tienen un período de utilización idéntico. En resultado, si los períodos de utilización de los objetos respectivos son diferentes, los procesos de renovación que habían comenzado desde hace mucho tiempo son uniformes; en tales procesos, el ciclo inicial eventual de la renovación ya se extinguió; sobrevino la estabilización del proceso de renovación [24]. El proceso uniforme se distingue por el hecho de que «su perfil histórico» es idéntico a su «perfil simultáneo». Esto está presentado en la parte inferior de la tabla 5, la cual ilustra el proceso uniforme de la renovación. Los números que se encuentran sobre las líneas oblicuas («perfil histórico») son iguales que los números que se encuentran en los versos hori-

coyuntural. El ciclo coyuntural provoca una concentración en la introducción de nuevos objetos durante determinados años (fases del ciclo de la coyuntura), lo que mantiene el ciclo de renovación sin permitir la extinción de éste. Por otra parte, el ciclo de renovación causa oscilaciones en la demanda de los capitales productivos fijos, lo cual, a su vez, hace que sean más fuertes las oscilaciones del ciclo coyuntural. La concatenación del ciclo coyuntural y el ciclo de renovación ya las tuvo en cuenta Marx: «Puede suponerse que en las ramas decisivas de la gran industria este ciclo de vida es hoy, por término medio, de diez años. Sin embargo, lo que aquí interesa no es la cifra concreta. La conclusión a que llegamos es que este ciclo de rotaciones encadenadas que abarca una serie de años, y que el capital se halla obligado a recorrer por sus elementos fijos, sienta las bases materiales para las crisis periódicas, en que los negocios recorren las fases sucesivas de la depresión, la animación media, la exaltación y la crisis. Los períodos en que se invierte capital son, en realidad, muy distintos y dispares. Sin embargo, la crisis constituye siempre el punto de partida de una nueva gran inversión. Y también, por tanto —desde el punto de vista de la sociedad en conjunto—, brinda siempre, más o menos, una nueva base material para el siguiente ciclo de rotaciones» *(El Capital,* t. II, p. 165). En la economía socialista no existe el ciclo coyuntural y, por consiguiente, no existe la concatenación del ciclo coyuntural y el ciclo de renovación. No obstante, el ciclo de renovación puede ser mantenido, o sea, puede no extinguirse si durante la reproducción a escala ampliada ocurre una concentración excesiva en el tiempo de la introducción de nuevos objetos. Sin embargo, hemos visto que se puede eludir el ciclo de renovación y, por lo tanto, puede evitarse una reiniciación de éste por medio de la distribución planificada correspondiente, durante la introducción de los nuevos objetos. En cuanto a la práctica, no siempre se puede evitar el primer impulso de la iniciación del ciclo de renovación (por ejemplo, al comenzar una industrialización intensiva que por varias razones no puede llevarse a cabo «poco a poco»), en tanto la continuación del ciclo de renovación que no se extingue constituye en la economía socialista una manifestación de la planificación deficiente.

[24] En la teoría de la renovación este tipo de proceso de renovación que se efectúa durante un tiempo más o menos largo, y que se había convertido en un proceso uniforme a consecuencia de la extinción del ciclo inicial de renovación, se llama proceso de renovación estabilizado y equilibrado *(equilibrium renewal process).* Ver D. R. Cox, *Renewal Theory,* ed. cit., p. 28: «El proceso equilibrado de la renovación puede interpretarse como un proceso común de renovación que se lleva a cabo dentro de un sistema dado, desde algún tiempo antes de haber efectuado la primera observación de éste.» Es conveniente señalar que los procesos de renovación que se presentan en la física nuclear y en algunos campos de la biología (como, por ejemplo, en la bacteriología y la epidemiología) son, por lo general, uniformes.

zontales («perfil simultáneo»). El número de objetos renovados cada año puede calcularse sumando tanto los números que se encuentran sobre las líneas oblicuas (sumando de acuerdo con el «perfil histórico») como también los números que se encuentran en los versos horizontales (sumando de acuerdo con el «perfil simultáneo»). Esto deriva del hecho de que cada año se renueva el mismo número de objetos.

La ecuación de la renovación a manera de la fórmula (5), presentada arriba, expresa el proceso de renovación en el «perfil histórico», sumando los objetos que pierden su valor de uso y que fueron introducidos en los subsiguientes años anteriores (en las unidades de tiempo), o sea,

$$(5) \quad N_0(t) = N_0(t-1)\,p_1 + N_0(t-2)\,p_2 + \ldots + N_0(t-\omega)\,p_\omega .$$

En el proceso uniforme en la renovación de cada año se introduce la misma cantidad de objetos, o sea, $N_0(t-1) = N_0(t-2) = \ldots = N_0(t-\omega) = N_0(t)$. En ese caso la ecuación de la renovación también puede escribirse en forma de

$$(5a) \qquad N_0(t) = N_0(t)\,p_1 + N_0(t)\,p_2 + \ldots + N_0(t)\,p_\omega ,$$

lo que corresponde a las sumas efectuadas según el «perfil simultáneo». La primera forma de ecuación de la renovación corresponde a las sumas efectuadas que se encuentran sobre las líneas oblicuas en la tabla 5; la segunda forma corresponde a las sumas efectuadas horizontalmente de acuerdo con las líneas. Es evidente que la segunda forma de la ecuación sólo puede ser aplicada cuando el proceso es uniforme.

En un proceso uniforme el coeficiente de renovación también puede calcularse tanto sobre la base del «perfil histórico» como

En dichos procesos la renovación se lleva a cabo con tal velocidad —en la física nuclear en el lapso de fracciones de un segundo, y en el transcurso de unas horas o unos días tratándose de la bacteriología o epidemiología—, que después de un tiempo muy corto se opera la estabilización del proceso. En cambio, en los procesos demográficos y en el proceso de renovación de los medios de producción o los bienes de consumo el período de vida humana o el período de utilización de muchos medios de producción o bienes de consumo (tales, por ejemplo, como edificios, instalaciones industriales, algunas máquinas, barcos, etc.) es tan largo, que es necesario mucho tiempo (decenas o más de años) antes de que se realice la estabilización del proceso. Por esta razón en los procesos de renovación demográficos y económicos el hecho de que el proceso perdure durante varios años no significa aún que se haya operado la estabilización de éste y que el proceso sea uniforme: esto depende del grado de sofocación de la oscilación del ciclo de renovación.

sobre la base del «perfil simultáneo» del proceso de renovación. Conforme a la fórmula (10), este coeficiente es

$$s = \frac{N_0(t)}{N},$$

cuando $N_0(t)$ se puede obtener tanto basándose en la ecuación (5) como también en la (5a), es decir, por medio de efectuar la suma «histórica» o la suma «simultánea».

Como resultado de la extinción del ciclo de la renovación, se produce, por consiguiente, el hecho de que, al transcurrir del tiempo, se asemejan entre sí, cada vez más, el «perfil histórico» y el «simultáneo» del proceso de renovación. En los procesos de renovación que empezaron hace ya tanto tiempo que lograron su estabilización, ambos perfiles son idénticos, y las propiedades del proceso pueden expresarse por medio de cualesquiera de ellos [25].

[25] Esta es la propiedad de la categoría de los procesos, a los que definimos como *procesos ergódigos* (del griego *ergos* y *hodos*, es decir, el camino del trabajo). Por procesos ergódigos entendemos aquellos procesos que se realizan durante el cambio que se opera en una magnitud dada, y que al transcurrir el tiempo tienden a repeticiones constantes de un valor determinado (llamado estado de equilibrio, estado estacionario, proceso uniforme, etc.), independientemente de los valores iniciales. El promedio de los valores sucesivos de una magnitud respectiva durante el transcurso temporal de cada proceso (el llamado promedio temporal o promedio histórico) tiende, con el paso del tiempo, a un promedio de valores simultáneos de esta magnitud dentro de un conjunto de transcursos «paralelos» independientes del mismo proceso (el llamado promedio de fase, o bien, promedio de perfil simultáneo). Esto dimana del hecho de que después de un cierto tiempo una magnitud dada toma, asintóticamente, de forma constante el mismo valor, independientemente de los valores iniciales. En estas condiciones el promedio de los valores sucesivos de una magnitud dada, al pasar el tiempo, tiende hacia aquel valor, que al final de cuentas se repite constantemente, o sea, hacia el llamado valor de equilibrio. Y, por otra parte, los cursos «paralelos» de un proceso respectivo tienden también a una repetición continua del mismo valor (el valor de equilibrio); el valor medio de una magnitud dada en los transcursos «paralelos» del proceso se convierte, por consiguiente, después de un cierto tiempo, en una magnitud que es igual al valor del equilibrio. Como resultado, el promedio histórico del transcurso temporal respectivo de un proceso dado y el promedio simultáneo del conjunto de los cursos «paralelos» transitorios, independientes del mismo proceso, tienden al mismo valor, llamado valor de equilibrio. De ahí dimana que ambos promedios (asintomáticamente) tienden el uno hacia el otro. El ejemplo más importante de los procesos ergódigos se presenta en el campo de los *procesos estocásticos*, es decir, procesos en los cuales el valor de la variable aleatoria en determinados momentos, o bien en las unidades de tiempo, fija una distribución de probabilidades que puede tener la misma variable aleatoria en un momento posterior o en una unidad de tiempo. Los procesos estocásticos estacionarios, o sea, aquellos procesos en que el valor medio y la facultad de variación de la variable aleatoria son inmutables en el tiempo, forman los procesos ergódigos. Interpretando los coeficientes de eliminación como probabilidades, podemos tratar el proceso de renovación como un proceso

La producción de los objetos necesarios para la renovación requiere un cierto tiempo. Este tiempo está determinado por medio del período de producción que corresponde al proceso técnico aplicado. Si este período es igual a T años (u otras unidades de tiempo), la producción de los objetos necesarios para la renovación en el año t tiene que comenzar en el año $t - T$. La producción necesaria para la renovación de los medios de producción, tanto de capital fijo como del circulante (como también para la renovación de los bienes de consumo desgastados), tiene que ser iniciada con una anticipación correspondiente. El período de producción de los objetos respectivos de determinado tipo puede, no obstante, ser diferente. Los objetos pueden ser elaborados en diversos establecimientos productivos en los cuales se aplican distintos procesos técnicos y, por lo tanto, éstos tienen diferentes períodos de producción. También dentro de un mismo establecimiento de producción los objetos idénticos pueden ser elaborados por medio de procesos técnicos que tienen diferentes períodos de producción. En ese caso, el tiempo de iniciación de la producción de las correspondientes series de objetos tiene que estar arreglado de tal manera que en el momento en que se retiren del uso los objetos viejos esté ya preparada la cantidad correspondiente de los objetos nuevos que sustituirán a los que se retiran del uso.

Por medio de $B_0(t - \tau)$ designemos el número de objetos cuyo período productivo es igual a 0 años (unidades de tiempo) y cuya producción se inició en el año $t - \tau$. Digamos que en el año t son necesarios $N_0(t)$ objetos para los fines de la renovación. Supongamos que las potencias productivas de los establecimientos de producción respectivos y de los procesos técnicos correspondientes sean tales que no todos los objetos necesarios puedan ser elaborados durante el mismo período productivo, sino que los diferentes objetos tengan los períodos productivos distintos, que son: 1, 2,

estocástico: el número de reposiciones $N_0(t)$ que aparece en el lado izquierdo de la ecuación de la renovación constituye entonces un valor medio de la distribución del número probable de los objetos eliminados durante un año respectivo. Dicha distribución la suponemos invariable en el tiempo y, por consiguiente, el valor medio de ésta y su facultad de variación también son invariables. El proceso de renovación es, por lo tanto, un proceso estocástico, estacionario, y como tal, ergódigo. En la cuestión de la ergodicidad de los procesos estocásticos estacionarios ver J. L. DOBB, *Stochastic Processes*, Nueva York, 1953, caps. X y XI, así como también a A. M. JAGLOM, *Vviedieniye v teoriu stacionarnyj sluchaynyj funkcii. Uspieji matematicheskij nauk*, Moscú, 1952, t. VII. En demografía, la ergodicidad del proceso de renovación se manifiesta en el hecho de que la distribución de la población según la edad (perfil simultáneo) tiende a una distribución de las probabilidades de supervivencia (distribución histórica de la edad de la población).

..., T años. En tal caso, la iniciación de la producción de los objetos respectivos tiene que ser distribuida en el tiempo de tal modo que pueda cumplirse la igualdad

$$(11) \qquad B_1(t-1) + B_2(t-2) + \ldots + B_T(t-T) = N_0(t).$$

A falta de una distribución adecuada en el tiempo de la iniciación de la producción de los objetos en el año t, pueden estar listos menos o más objetos retirados del uso; el tiempo de iniciar la producción de los objetos no es entonces coordinado con el tiempo de la renovación. Por esta razón, la igualdad arriba presentada la denominaremos *ecuación de coordinación del tiempo de la iniciación* de producción de objetos.

Para la ilustración examinaremos el siguiente ejemplo. Supongamos que el proceso de renovación es uniforme y que el número de objetos que se someten cada año a la renovación es igual a 4 000 (como en el ejemplo examinado anteriormente). Por consiguiente, es necesario tener listos 4 000 objetos cada año, para reemplazar los objetos que salen del uso. Supongamos ahora que 500 objetos puedan ser elaborados en el transcurso de un año, 2 000 en el transcurso de dos años y 1 500 en el transcurso de tres años. Entonces la coordinación de la iniciación de producción y el número de los objetos necesarios para la renovación durante cada año se presentará como en la tabla 8.

TABLA 8

LA PRODUCCIÓN COORDINADA DE OBJETOS NECESARIOS PARA LA RENOVACIÓN

Año	El número de los objetos iniciados cuyo período productivo es de			El número de los objetos listos
	3 años	2 años	1 año	
1	1 500	2 000	500	
2	1 500	2 000	500	500
3	1 500	2 000	500	2 500
4	1 500	2 000	500	4 000
5	1 500	2 000	500	4 000
6	1 500	2 000	500	4 000
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

En esta tabla las primeras tres columnas representan los números de los objetos iniciados cada año que tienen el período productivo de tres, dos y un años, respectivamente, en tanto que la última columna representa los números de los objetos acabados durante cada uno de los años. El número de los objetos elaborados constituye la suma de los objetos iniciados en los tres años anteriores; esto está ilustrado por medio de líneas oblicuas. Como se ve en la tabla, después de tres años necesarios para establecer un proceso productivo coordinado, el número de objetos elaborados es siempre igual al número de los objetos necesarios para la renovación (4 000 en nuestro ejemplo). El proceso productivo se convierte en un proceso coordinado que tiene necesidad de un proceso uniforme de la renovación. Generalmente, si el período productivo es más largo que T años, un proceso productivo coordinado se logra después de T años desde el momento de su iniciación [26].

Si el proceso productivo de los objetos necesarios para la renovación está coordinado con el proceso uniforme de la renovación, entonces el proceso productivo también se convierte en un proceso uniforme: su «perfil histórico» y «simultáneo» son idénticos. Esto está demostrado en la tabla 8. A partir del cuarto año los números que se encuentran sobre las líneas oblicuas son iguales a los números que se encuentran en las horizontales de la tabla. En vista de la uniformidad del proceso productivo, se realiza

$$B_1(t-1) = B_1(t), B_2(t-2) = B_2(t), \ldots, B_T(t-T) = B_T(t),$$

es decir, el número de objetos que tienen los períodos productivos $1, 2, \ldots, T$ años, iniciados en los años $t-1, t-2, \ldots, t-T$, es igual al número de los objetos con períodos productivos idénticos, iniciados en el año t. Introduciéndolo en la ecuación de coordinación (11), obtenemos

$$B_1(t) + B_2(t) + \ldots + B_T(t) = N_0(t). \tag{11a}$$

La identidad de los perfiles «histórico» y «simultáneo» en el proceso productivo uniforme significa que en el proceso productivo coordinado con el proceso uniforme de la renovación no existe la «espera» del producto acabado. Los objetos acabados aparecen simultáneamente con la demanda de éstos, para sustituir los

[26] H. DUNAJEWSKI examina este problema: *Studia nad teoria wzrostu gospodarczego* (Estudios sobre la teoría del crecimiento económico), Varsovia, 1965, cap. I.

objetos que salen del uso. La «espera» tiene lugar sólo en los primeros años T, necesarios para poner en marcha un proceso productivo uniforme. Esto también se presenta cuando se opera un cambio en el número de los objetos que se reponen, puesto que entonces otra vez es necesario un cierto tiempo para poner de nuevo en función la uniformidad del proceso productivo.

La «espera» es, por consiguiente, resultado de la ausencia de uniformidad en el proceso productivo, causada por su falta de coordinación con el proceso de renovación. Este caso no se da cuando el proceso de renovación y el productivo coordinado con él son simultáneos [27].

[27] La cuestión de que si un proceso productivo uniforme requiere «espera» del producto y en qué grado fue objeto de serias discusiones en el marco de la llamada escuela austríaca y la escuela neoclásica. Esto estaba ligado a la cuestión de la interpretación del ingreso obtenido del capital como una gratificación por la «espera» (sobre todo, E. VON BÖHM-BAWERK y A. MARSHALL, contra los cuales F. WIESER, J. B. CLARK y F. H. KNIGHT planteaban el argumento de que en un proceso productivo uniforme no se espera al resultado de la producción). Aquí nos limitaremos a exponer que esta disputa echó un poco de luz sobre la relación que existe entre el perfil «histórico» y el «simultáneo» de la producción; no llevó, sin embargo, a los participantes en esta discusión a un esclarecimiento total del problema, porque tal esclarecimiento requiere una aplicación sistemática de los resultados de la teoría contemporánea de la renovación.

APÉNDICE

ANALISIS MATEMATICO DEL PROCESO DE LA RENOVACION

1. *El proceso continuo de la renovación.*—Para simplificar la exposición damos por supuesto que el proceso de la renovación es continuo. Mediante N_τ designamos el número de objetos utilizados durante τ unidades de tiempo, o sea, objetos que tienen la edad de τ años; N_0 constituye el número de nuevos objetos introducidos a la utilización (es decir, los que tienen la edad de cero años). El coeficiente de duración es

$$l(\tau) = \frac{N_\tau}{N_0}. \tag{1.1}$$

Suponemos que $l(\tau)$ constituye la función diferencial que tiene una derivada continua. El coeficiente de eliminación lo definimos como [1]

$$f(\tau) = -l(\tau), \tag{1.2}$$

y la intensidad de eliminación como

$$\mu(\tau) = \frac{f(\tau)}{l(\tau)}. \tag{1.3}$$

Se realiza

$$l(\tau) \geqslant 0 \quad \text{así como también} \quad f(\tau) \leqslant 1 \quad \text{y} \quad \mu(\tau) \leqslant 1.$$

El coeficiente de duración y el coeficiente de eliminación pueden interpretarse como una concentración de probabilidades. Entonces $l(\tau)\, d\tau$ constituye la probabilidad de que el objeto llegue hasta el (final) de la edad $\tau + d\tau$, y $f(\tau)\, d\tau$ constituye la probabilidad

[1] El signo «menos» lo ponemos en la parte derecha para que $f(\tau)$ no sea negativa. Puesto que $l(\tau)$ constituye una función menguante o, por lo menos, una función no creciente (existen menos objetos más viejos, y de todas maneras éstos no sobrepasan la cantidad de objetos más nuevos), por consiguiente, $l'(\tau) \leqslant 0$.

de que el objeto pierda su valor del uso cuando cumpla la edad de $\tau + d\tau$. La intensidad de eliminación constituye entonces una concentración condicional de la probabilidad de que el objeto que es utilizado durante el tiempo τ, pierda su valor el uso durante $\tau + d\tau$.

2. *La ecuación de la renovación.*—Por medio de $N_0(t)$ designamos el número de nuevos objetos introducidos durante el tiempo t; al mismo tiempo damos por supuesto que $N_0(t)$ constituye una función diferencial de t. En el momento t se eliminan $N_0(t-\tau)f(\tau)$ objetos introducidos al uso en el momento $t-\tau$. Digamos que ω constituye el período más largo de utilización de los objetos. Entonces la eliminación conjunta de los objetos en el momento t es

$$\int_0^{\omega} N_0(t-\tau)f(\tau)\,d\tau.$$

El número de objetos que tienen que renovarse en el momento t (es decir, el número de nuevos objetos que tienen que ser introducidos al uso para sustituir los objetos retirados) es, por lo tanto,

$$N_0(t) = \int_0^{\omega} N_0(t-\tau)f(\tau)\,d\tau. \tag{2.1}$$

Esta es la *ecuación de la renovación* [2].

La ecuación de la renovación es una ecuación integral; la función incógnita de esta ecuación es la función $N_0(t)$, llamada la *función de la renovación,* en tanto que la función $f(\tau)$ está dada (función de eliminación de los objetos).

Junto a la forma expuesta en la fórmula modelo (2.1) existen otras maneras de presentar la ecuación de la renovación. Algunas veces, en lugar del máximo tiempo de utilización se da por supuesto que los objetos pueden, en principio, ser utilizados por un tiempo indefinido, o sea, que $\omega = \infty$, con la particularidad de que el número de los objetos más viejos, cuando aumenta la edad de

[2] La ecuación de la renovación fue formulada por primera vez por el matemático italiano VITO VOLTERRA, *Leçons sur les équations intégrales et les équations integro-différencielles,* París, 1913, y posteriormente (estas conferencias tuvieron lugar en 1910) Volterra las llamó «ecuación integral de efectos hereditarios», o sea, de efectos que dependen de los estados anteriores de un sistema dado y, por consiguiente, en un cierto modo constituyen «la herencia del pasado». Volterra aplicó esta ecuación en la investigación del desarrollo y de la competencia que existe entre las poblaciones biológicas. El demógrafo y actuario norteamericano J. Lotka aplicó dichas ecuaciones a la demografía y después a los problemas de la renovación de los medios de producción.

éstos, tiende a cero. Entonces la integral que se encuentra del lado derecho de la ecuación (2.1) se escribe dentro de los límites del 0 al ∞. Tales límites de integración constituyen al mismo tiempo una concepción más generalizada de la ecuación de la renovación. Si existe un tiempo máximo finito de utilización ω, entonces

$$\int_0^{\infty} N_0(t-\tau) f(\tau)\, d\tau = \int_0^{\omega} N_0(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + \int_{\omega}^{\infty} N_0(t-\tau) f(\tau)\, d\tau$$

y la segunda integral que se encuentra del lado derecho es igual a cero. La integral que está del lado izquierdo es entonces igual a la que aparece en la ecuación (2.1).

En lugar de los límites de integración, que son de 0 a ω, se toman frecuentemente los límites de integración de 0 a t. La ecuación de la renovación toma entonces la forma de

$$N_0(t) = \int_0^{t} N_0(t-\tau) f(\tau)\, d\tau.$$

En dicha forma la ecuación de la renovación considera solamente los objetos introducidos al uso, comenzado desde el momento $t\text{-}t = 0$. Si existe un tiempo máximo de utilización ω, entonces para $t > \omega$ esta ecuación es idéntica a la ecuación (2.1), porque la integral puede descomponerse en la suma de dos integrales $\int_0^{\omega} + \int_{\omega}^{t}$, donde el segundo elemento es igual a cero. En cambio, si $\omega = \infty$, entonces la ecuación de la renovación es

$$N_0(t) = \int_0^{\infty} N_0(t-\tau) f(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^{t} N_0(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + \int_t^{\infty} N_0(t-\tau) f(\tau)\, d\tau.$$

Como lo demuestra la segunda integral que se encuentra del lado derecho, el proceso de renovación se remonta entonces a un momento infinitamente anterior, y en el momento t se someten a la renovación también los objetos que fueron introducidos al uso durante un tiempo remoto, infinitamente lejano.

No obstante, se da por supuesto, como regla, que el proceso de renovación se inició en un tiempo finito, digamos en el momento cero. Entonces en vez de la integral que se encuentra del lado de-

recho se toma el valor $N_0(0)\, f(t)$, es decir, el número de objetos introducidos en el momento inicial 0, que salen del uso en el momento t. La ecuación de la renovación es entonces

$$N_0(t) = N_0(0) f(t) + \int_0^t N_0(t-\tau) f(\tau)\, d\tau.$$

Introduciendo las fracciones

$$g(t) = \frac{N_0(t)}{N_0(0)} \quad \text{así como también} \quad g(t-\tau) = \frac{N_0(t-\tau)}{N_0(0)},$$

la última ecuación también puede escribirse en forma de

$$g(t) = f(t) + \int_0^t g(t-\tau) f(\tau)\, d\tau.$$

La fracción $g(t)$ y $g(t\text{-}\tau)$ se denomina *frecuencia de la renovación;* ésta expresa la cantidad de los objetos introducidos al uso en un momento determinado como una fracción de la cantidad de objetos introducidos en el momento inicial 0, o sea, lo que le corresponde a un objeto inicial.

Además, también se puede extender el caso de la ecuación de la renovación a la reproducción a escala ampliada de los medios de producción. En ese caso, a la ecuación que tiene la forma presentada arriba se le agrega la función $\Phi\ (t)$ de su lado derecho y ésta expresa el coeficiente respectivo del incremento de la cantidad de los objetos (en relación al momento inicial 0) en el año t.

Lo más conveniente para nuestros fines es utilizar la ecuación de la renovación en forma de (2.1).

3. *Resolución de la ecuación de la renovación.*—En la forma (2.1) la ecuación de la renovación constituye una ecuación integral homogénea. Damos por supuesto que la función sobrante tiene la forma de $N_0(t) = e^{\varrho t}$, donde ϱ constituye un parámetro. Al introducirla en la ecuación integral verificamos si esta función puede resolver dicha ecuación. Insertando obtenemos

$$e^{\varrho t} = \int_0^\infty e^{\varrho(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau,$$

o sea,

$$e^{\varrho t} = e^{\varrho t} \int_0^\infty e^{-\varrho\tau} f(\tau)\, d\tau. \tag{3.1}$$

Dividiendo ambos lados entre $e^{\varrho t} \neq 0$, esta ecuación se reduce a[3]

$$\int_0^\infty e^{-\varrho\tau} f(\tau)\, d\tau = 1. \tag{3.2}$$

Resulta que la función $N_0(t) = e^{-\varrho t}$ constituye una resolución de la ecuación integral si el parámetro cumple con la fórmula (3.2). Esta es la *ecuación característica* de la ecuación integral (2.1). Dando por supuesto que el parámetro ϱ está determinado sobre la base del conjunto de números combinados, y recordando que la función $f(\tau)$ es continua, comprobamos que el lado izquierdo de la función característica constituye una función analítica en el territorio de todo el plano unificado. De la teoría de las funciones analíticas se sabe que (excluyendo el caso trivial en que la función es una constante) los puntos en los cuales la función adquiere un valor finito determinado (en este caso es un valor igual a 1) son aislados. En un territorio determinado el número de dichos puntos es finito, en tanto que en todo el plano unificado éstos forman un conjunto calculable. Por consiguiente, existe un número infinito de valores del parámetro que cumplen con la ecuación característica (3.2) y el conjunto de estos valores es calculable. Dichos valores forman, por lo tanto, el orden infinito ϱ_1, ϱ_2 ... En vista de eso existe el orden infinito de las funciones $e^{\varrho_1 t}$, $e^{\varrho_2 t}$, ... las cuales constituyen la solución de la ecuación integral (3.2).

Por medio de la intercalación en una ecuación integral se puede verificar que la combinación lineal (la suma balanceada) de cualquier número de estas funciones también es una solución de la ecuación integral. La solución general de la ecuación de la renovación (2.1) tiene, por consiguiente, la forma de

$$N_0(t) = \sum_{j=1}^{m} Q_j e^{\varrho_j t}, \tag{3.3}$$

[3] El lado izquierdo de la ecuación característica (3.2) constituye una transformante del coeficiente de eliminación de Laplace $f(\tau)$ (sobre la cuestión de los límites de la integración, ver más arriba). Por consiguiente, esta ecuación confirma que la transformante de la función de Laplace $f(\tau)$ es igual a 1. Este resultado se puede obtener directamente, aplicando la transformante de Laplace a la ecuación integral (2.1). Designemos la transformante de Laplace por medio de L. El lado derecho de la ecuación (2.1) constituye una fusión de las funciones $N_0(t)$ y $f(\tau)$

donde los coeficientes Q_j son números reales. En esta solución general los parámetros ϱ_1, ϱ_2 ... constituyen los elementos de la ecuación característica y los coeficientes Q_1, Q_2 ... son libres; sin embargo, se les pueden conferir determinados valores mediante la premisa de que la función $N_0(t)$ tiene un transcurso dado durante un lapso de tiempo determinado (las llamadas condiciones marginales y, en el caso particular, cuando aceptamos el lapso de tiempo que comienza desde el momento 0, hablamos de las condiciones iniciales).

Si el elemento ϱ_j es repetido y su repetición es r, entonces las funciones $t\,e^{\varrho_j t}$, $t^2 e^{\varrho_j t}$, ..., $t^{r-1} e^{\varrho_j t}$ también constituyen soluciones de la ecuación integral (3.1) [4]. Por esta razón la combinación lineal

$$Q_{j0}\,e^{\varrho_j t} + Q_{j1}\,t\,e^{\varrho_j t} + \ldots + Q_{j,r-1}\,t^{r-1}\,e^{\varrho_j t}$$

también constituye solución de esta ecuación. En ese caso, en lugar del coeficiente constante Q_j se presenta la expresión

$$Q_j(t) = Q_{j0} + Q_{j1}\,t + \ldots + Q_{j,r-1}\,t^{r-1},$$

(aceptamos que $t \geqslant \omega$, en vista de lo cual t puede considerarse como el límite superior de la integración). Por consiguiente, tenemos

$$L\,N_0(t) = L\,N_0(t) \cdot L f(\tau)$$

Omitiendo el caso trivial de $L\,N_0(t) = 0$ (entonces también $N_0(t) = 0$), esta función se cumple cuando $L f(\tau) = 1$. Esto es equivalente a la ecuación característica (3.1).

[4] Designemos el lado izquierdo de la ecuación característica (3.2) por medio de $F(\varrho)$.

Decimos que ϱ_j es un elemento repetido r veces de la ecuación característica, si $F(\varrho_j) = 1$ y $F(\varrho) = (\varrho - \varrho_j)^r \Phi(\varrho)$, donde $\Phi(\varrho) \neq 0$. En este caso, $F'(\varrho_j) = F''(\varrho_j) = \ldots = F^{(r-1)}(\varrho_j) = 0$ y $F^{(r)}(\varrho_j) \neq 0$.

Diferenciando consecutivamente ambos lados en el modelo (3.1), obtenemos

$$t\,e^{\varrho t} = t\,e^{\varrho t} F(\varrho) + e^{\varrho t} F'(\varrho)$$

$$t^2 e^{\varrho t} = t^2 e^{\varrho t} F(\varrho) + 2t\,e^{\varrho t} F'(\varrho) + e^{\varrho t} F''(\varrho) \text{ etc.}$$

Si ϱ_j es el elemento repetido r veces de la ecuación característica, en resultado tenemos

$$t\,e^{\varrho_j t} = t\,e^{\varrho_j t} F(\varrho_j),\ t^2 e^{\varrho_j t} = t^2 e^{\varrho_j t} F(\varrho_j),\ \ldots,\ t^{r-1} e^{\varrho_j t} = t^{r-1} e^{\varrho_j t} F(\varrho_j).$$

Puesto que $F(\varrho_j) = 1$, resulta que las funciones $t\,e^{\varrho_j t}$, $t^2 e^{\varrho_j t}$, ..., $t^{r-1} e^{\varrho_j t}$ también cumplen la ecuación diferencial (2.1).

o sea, el polinomio de la variable t de un grado inferior de 1 en relación al elemento. Teniendo en cuenta la posible repetición del elemento ϱ_j, escribimos la solución general en la forma

$$N_0(t) = \sum_{j=1}^{\infty} Q_j(t)\, e^{\varrho_j t}. \tag{3.4}$$

En el caso que el elemento ϱ_j se presente una sola vez, el polinomio $Q_j(t)$ se reduce a la constante Q_j, y (3.3) queda abarcado por (3.4). La ecuación característica (3.2) tiene uno y solamente un elemento real, que es $\varrho = 0$. Sobre el hecho de que $\varrho = 0$, nos convencemos directamente introduciendo este valor en la ecuación característica. Obtenemos entonces

$$\int_0^{\infty} f(\tau)\, d\tau = 1.$$

Esta igualdad está cumplida, debido a la definición del coeficiente (de la probabilidad) de eliminación $f(\tau)$. Durante el lapso de tiempo $[0, \infty]$ se eliminan todos los objetos introducidos durante el momento inicial de este lapso; la integral que se encuentra del lado izquierdo de la ecuación arriba presentada es, por lo tanto, siempre igual a 1. También observamos que el lado izquierdo de la ecuación característica (3.2) constituye una función constante del parámetro ϱ y, al mismo tiempo, $f(\tau) \geqslant 0$. Por consiguiente, en el conjunto de valores reales esta función disminuye monotónicamente junto con el incremento ϱ. Los valores de ésta tienden a ∞ cuando $\varrho = -\infty$ y a 0 cuando $\varrho = +\infty$; por esta razón existe sólo un valor real, para el cual dicha función es igual a 1. Este valor es $\varrho = 0$. Existe, por consiguiente, un elemento real $\varrho = 0$, y los elementos restantes de la ecuación característica son combinados. En resultado, la solución general de la ecuación de la renovación (3.3) puede escribirse en la forma de[5]

$$N_0(t) = Q_1 + \sum_{j=2}^{\infty} Q_j(t)\, e^{\varrho_j t}, \tag{3.5}$$

donde los parámetros $\varrho_2, \varrho_3, \ldots$ son todos combinados.

4. *Determinación de los elementos de la ecuación característica.* Encontramos los elementos de la ecuación característica mediante

[5] El elemento real $\varrho = 0$ es unitario porque $F'(0) = -\int_0^{\infty} \tau f(\tau)\, d\tau < 0$.

el método de aproximaciones consecutivas. Con este fin desarrollamos $e^{\rho\tau}$ en un orden potencial. La ecuación característica (3.2) asume entonces la forma de

$$\int_0^\omega \left(1 - \frac{\varrho\tau}{1!} + \frac{\varrho^2\tau^2}{2!} - \ldots\right) f(\tau)\, d\tau = 1,$$

o sea,

$$(4.1)\quad \int_0^\omega f(\tau)\, d\tau - \frac{\varrho}{1!}\int_0^\omega \tau f(\tau)\, d\tau + \frac{\varrho^2}{2!}\int_0^\omega \tau^2 f(\tau)\, d\tau - \ldots = 1.$$

Puesto que $f(\tau)$ puede interpretarse como concentración de probabilidades, por consiguiente, las integrales que aparecen en la expresión arriba presentada constituyen los *momentos* de distribución de la edad probable τ, en la cual los objetos salen del uso. Designemos estos momentos por medio de m_0, m_1, m_2, ... y la ecuación (4.1) la escribimos en forma de

$$(4.2)\qquad m_0 - \frac{m_1}{1!}\varrho + \frac{m_2}{2!}\varrho^2 - \frac{m_3}{3!}\varrho^3 + \ldots = 1.$$

Como lo hemos comprobado antes, la primera integral que se encuentra del lado izquierdo de la ecuación (4.1) es igual a 1, es decir, $m_0 = 1$. En vista de eso, tenemos

$$(4.3)\qquad \frac{m_1}{1!}\varrho + \frac{m_2}{2!}\varrho^2 - \frac{m_3}{3!}\varrho^3 + \ldots = 0.$$

Esta es la ecuación algebraica de grado infinito, y tiene un número infinito de elementos. Los coeficientes de dicha ecuación los constituyen los momentos consecutivos de la distribución de probabilidades en cuanto a la edad de los objetos que salen del uso, divididos entre los correspondientes cocientes.

Tomando un número finito de expresiones del polinomio que aparece del lado izquierdo de la ecuación (4.3), encontramos los elementos del polinomio finito. De esa manera obtenemos la aproximación de la suma infinita (3.5), que constituye la solución general de la ecuación de la renovación. Tomando un número cada vez mayor del polinomio, puede obtenerse una aproximación discrecional de esta solución. Como los coeficientes consecutivos del polinomio disminuyen debido a los cocientes n que se encuen-

tran en el denominador de éstos, basta un pequeño número de expresiones para lograr una aproximación buena.

En la ecuación (4.3) se puede poner ϱ delante del paréntesis. De ahí dimana inmediatamente que esta ecuación tiene el elemento real $\varrho = 0$. Como es sabido, éste es el único elemento real, y es también unitario solamente. Después de poner ϱ delante del paréntesis obtenemos la ecuación

$$(4.4) \qquad -m_1 + \frac{m_2}{2!}\varrho - \frac{m_3}{3!}\varrho^2 + \ldots = 0.$$

Aquí $m_1 = \int_0^\omega \tau f(\tau) d\tau$ constituye la edad media de los objetos que salen del uso y, por lo tanto, m_1 es mayor que 0 [6]. Por esta razón no se puede llevar ϱ nuevamente fuera del paréntesis; $\varrho = 0$ constituye el elemento unitario de la ecuación característica (4.3).

Otros elementos de la ecuación característica (4.3) constituyen, al mismo tiempo, elementos de la ecuación (4.4). Como sabemos, éstos son elementos combinados y, por consiguiente, la ecuación (4.4) puede servir para determinar los elementos combinados. Puesto que los coeficientes de esta ecuación son reales, los elementos aparecen en pares conjugados. Por eso, al efectuar la aproximación por medio de un polinomio finito es necesario emplear un polinomio de grado par (si el grado de éste fuese impar, tendría que aparecer un elemento real).

El método presentado aquí para determinar los elementos de la ecuación característica y, por lo tanto, para determinar también la función de la renovación $N_0(t)$ mediante el método de aproximaciones consecutivas se distingue porque éste se basa en los momentos de la distribución de probabilidad $f(\tau)$. Dichos momentos pueden ser calculados con base en los datos estadísticos.

Sucede que el lado izquierdo de la ecuación característica constituye también una función creadora de los momentos. De la estadística matemática se sabe que también el logaritmo (natural) de la función creadora puede desarrollarse en un orden potencial. Efectuando la logaritmización de ambos lados de la ecuación característica (3.2) obtenemos

$$\ln \int_0^\omega e^{-\varrho\tau} f(\tau)\, d\tau = 0$$

[6] Aquí prescindimos del caso $m_1 = 0$, que carece de sentido práctico, porque significa que los objetos son retirados en la edad 0, es decir, nunca salen del uso. Entonces $f(\tau) = 0$ tendría que valer para todos los valores $\tau \neq 0$. Si $f(\tau) > 0$ aun para un valor $\tau \neq 0$ solamente, entonces (considerando que $\omega > 0$) todos los momentos $m_1, m_2, \ldots$ son positivos.

y desarrollando el lado izquierdo en un orden potencial tenemos

$$(4.5) \qquad -\frac{k_1}{1!}\varrho + \frac{k_2}{2!}\varrho^2 - \frac{k_3}{3!}\varrho^3 + \ldots = 0.$$

Los coeficientes k_1, k_2, ... son los cumulantes (llamados también *semivariables o semivariantes)* de la distribución de probabilidad de la probable edad en que los objetos salen del uso.

Llevando ϱ delante del paréntesis que se encuentra del lado izquierdo de la ecuación (4.5) comprobamos que $\varrho \quad 0$ es el elemento real (unitario) y que

$$(4.6) \qquad -k_1 + \frac{k_2}{2!}\varrho - \frac{k_3}{3!}\varrho^2 + \ldots = 0.$$

Tomando un número finito de expresiones que dan el polinomio de un grado par, pueden determinarse con una aproximación discrecional valores de los elementos combinados de la ecuación característica.

Este es el modo alternativo para determinar los elementos de la ecuación característica por medio de aproximaciones consecutivas con base en los datos estadísticos. Al mismo tiempo, hay que observar que entre los cumulantes y los momentos ocurren los siguientes nexos [7]:

$$(4.7) \qquad k_1 = m_1, \quad k_2 = m_2 - m_1^2, \quad k_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3$$

así como también las expresiones más complejas de polinomios para los cumulantes ulteriores. En vista de eso, al efectuar la aproximación por medio del polinomio de segundo grado tenemos:

$$-k_1 + \frac{k_2}{2!}\varrho - \frac{k_3}{3!}\varrho^2 =$$

$$= -m_1 + \frac{m_2}{2!}\varrho - \frac{m_3}{3!}\varrho^2 - \left(\frac{m_1^2}{2!}\varrho + \frac{-3m_2m_1 + 2m_1^3}{3!}\varrho^2\right).$$

Como se ve, la diferencia que existe entre la aproximación efectuada por medio de los momentos, y la aproximación efectuada mediante los cumulantes, es tanto menor cuanto menor es el pro-

[7] Ver, por ejemplo, M. G. KENDALL, *The Advanced Theory of Statistics*, Londres 1948, t. I, p. 63, o bien a M. FISZ, *Rachunek prawdopodobienstwa i statystyka matematyczna* (Cálculo de probabilidades y estadística matemática), Varsovia, 1958, p. 103.

medio m^1. Cuando los valores m_1 son grandes, esta diferencia se hace pequeña sólo cuando se efectúa la aproximación con la ayuda de polinomios de alto grado.

5. *Propiedades de la función de la renovación.*—La resolución general de la ecuación de la renovación, o sea, la función de la renovación, puede escribirse en la forma del modelo (3.5), y, al mismo tiempo, los parámetros ϱ_2, ϱ_3, ... que se presentan bajo el signo de la suma son combinados. Lo haremos evidente escribiendo $\varrho = \alpha_j + i\beta_j$ $(j = 2, 3, \ldots)$, y también escribiendo la ecuación (3.5) en forma de

$$N_0(t) = Q_1 + \sum_{j=2}^{\infty} Q_j(t) e^{(\alpha_j + i\beta_j)t}. \tag{5.1}$$

Aprovechando el modelo de Euler, $e^{i\Phi} = \cos \Phi + i \operatorname{sen} \Phi$, lo presentamos en la forma de

$$N_0(t) = Q_1 + \sum_{j=2}^{\infty} Q_j(t)\, e^{\alpha_j t} (\cos \beta_j t + i \operatorname{sen} \beta_j t). \tag{5.2}$$

Resulta que la función de la renovación $N_0(t)$ tiene el transcurso oscilatorio. Existe un número infinito de oscilaciones calculables que se recubren mutuamente. Dichas oscilaciones que se recubren forman el ciclo de renovación. Todas esas oscilaciones y, por consiguiente, el ciclo de la renovación se realizan en torno al valor constante Q_1.

Sustituyendo $\varrho = \alpha - i\beta$ en la ecuación característica (3.2) y considerando el modelo de Euler,

$$e^{-i\Phi} = \cos \Phi - i \operatorname{sen} \Phi,$$

obtenemos

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} (\cos \beta\tau - i \operatorname{sen} \beta\tau) f(\tau)\, d\tau = 1.$$

Esta ecuación se cumple cuando su parte real es igual a 1 y la parte imaginaria es igual a 0, o sea,

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos \beta\tau\, d\tau = 1 \tag{5.3a}$$

así como también

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \operatorname{sen} \beta\tau\, d\tau = 0. \tag{5.3b}$$

De la primera de dichas condiciones dimana que $\alpha_j < 0$. Como $\cos \beta\tau \leqslant 1$, y, a la vez, $\cos \beta\tau < 1$ para casi todos los valores de τ, en vista de eso la expresión subintegral es menor que $e^{-\alpha\tau} f(\tau)$. De ahí

$$\int_0^{\omega} e^{-\alpha\tau} \cos \beta\tau f(\tau) d\tau < \int_0^{\omega} e^{-\alpha\tau} f(\tau) d\tau .$$

Como sabemos, el lado derecho de esa desigualdad es igual a 1 si y solamente cuando $\alpha_j < 0$. En resultado, $e^{\alpha j t} \longrightarrow 0$ cuando t es creciente; las oscilaciones son sofocadas y el ciclo de renovación se extingue.

Un caso especial ocurre cuando la función $f(\tau)$ no es continua, como hasta ahora suponíamos, sino $f(\tau) = 0$ para $\tau < \omega$ y $f(\omega) = 1$. Este es un caso particular [8] cuando todos los objetos tienen el mismo período de utilización ω. Entonces el cumplimiento de la condición (5.3a) requiere que $\alpha = 0$, las oscilaciones son constantes y todas tienen el mismo período de utilización, igual a ω. Existe entonces un constante e inextinguible ciclo de la renovación durante el período ω.

De la segunda de esas ecuaciones dimana directamente que si $\varrho_j = \alpha_j + i\beta_j$ cumple la ecuación característica, también la cumple $\varrho_j = \alpha_j - i\beta_j$. Los parámetros ϱ_j aparecen, por consiguiente, en parejas conjugadas, lo que también constituye un requisito de que el lado izquierdo de la igualdad (5.1) ó (5.2) sea real.

Como resultado (omitiendo el caso particular citado), la suma que aparece del lado derecho del modelo (5.2) tiende a cero cuando $t \longrightarrow \infty$. En vista de eso,

$$\lim_{t \to \infty} N_0(t) = Q_1, \tag{5.4}$$

es decir, la función de la renovación tiende a un valor constante.

Esto significa que el número de objetos renovados en un momento particular del tiempo se vuelve cada vez más próximo a un cierto valor constante: el ciclo de la renovación se transforma asintóticamente en un proceso uniforme de la renovación. Q_1 constituye el número de objetos restituidos en cada uno de los momentos del tiempo, durante el proceso uniforme de la renovación. Esto permite que se determine el valor de ésta.

[8] En su sentido estricto, esto se realiza cuando $f(\tau) = 1$ para cierto valor de τ_0 y $f(\tau) = 0$ para todos los demás valores τ. El período de utilización es entonces igual a τ_0, o sea, tenemos $\tau_0 = \omega$, lo que conduce al resultado presentado en el texto.

En el proceso uniforme de renovación la reserva de los objetos existentes es constante, la designaremos por medio de N. En el momento ulterior t esta reserva es

$$N = \int_0^{\omega} N_0(t - \tau)\, l(\tau)\, d\tau.$$

En cada uno de los momentos se introduce el mismo número de objetos Q_1, o sea, se realiza $N_0(t - \tau) = Q_1$ para cada valor t y τ. Por consiguiente,

$$N = Q_1 \int_0^{\omega} l(\tau)\, d\tau,$$

o sea,

$$Q_1 = \frac{N}{\int_0^{\omega} l(\tau)\, d\tau} \tag{5.5a}$$

El período medio de la utilización de los objetos es el denominador de dicha expresión. El número de los objetos restituidos en cada uno de los momentos del tiempo es, por lo tanto, igual a la reserva de los objetos, dividida entre el período medio de la utilización de éstos.

Aplicando el modelo de la integración por partes, encontramos (para $\varepsilon > 0$)

$$\int_0^{\omega+\varepsilon} l(\tau)\, d\tau = [\tau\, l(\tau)]_0^{\omega+\varepsilon} - \int_0^{\omega+\varepsilon} \tau\, l'(\tau)\, d\tau.$$

Puesto que ω constituye el margen superior del tiempo de la utilización de los objetos, y, por tanto, $l(\omega + \varepsilon) = 0$, se cumple que

$$\int_0^{\omega+\varepsilon} l(\tau)\, d\tau = -\int_0^{\omega+\varepsilon} \tau\, l'(\tau)\, d\tau.$$

Dando por supuesto que $\varepsilon \to 0$ y considerando (1.2), obtenemos

$$\int_0^{\omega} l(\tau)\, d\tau = \int_0^{\omega} \tau\, f(\tau)\, d\tau = m_1,$$

es decir, el período medio de utilización es igual a la edad media de los objetos que salen del uso. El modelo (5.5a) se puede, por lo tanto, escribir también en la forma de

$$Q = \frac{N}{m_1}. \tag{5.5b}$$

Finalmente, determinado el *coeficiente de renovación* como

$$s = \frac{1}{\int_0^\omega l(\tau)\,d\tau} = \frac{1}{m_1}$$

tenemos también

$$Q_1 = N s. \tag{5.6}$$

Todos estos métodos son equivalentes para determinar el valor Q_1.

El valor Q_1 constituye un valor límite de la función de la renovación. Por medio de la «dosificación» adecuada en la introducción de nuevos objetos durante un cierto período inicial del tiempo es posible llegar a un proceso uniforme de renovación sin el ciclo transitorio de la renovación. Con este fin, durante el tiempo inicial es necesario introducir los objetos en tales cantidades que desde el principio se cumpla la ecuación $N_0(t) = Q_1$. La ecuación de la renovación (2.1) toma entonces la forma de

$$Q_1 = \int_0^\omega N_0(t-\tau) f(\tau)\,d\tau. \tag{5.7}$$

Puesto que, como sabemos, $\int_0^\omega f(\tau)\,d\tau = 1$, se nota inmediatamente que esta ecuación se cumple cuando $N(t-\tau) = Q_1$, en el intervalo $[t-\omega, t]$. Esta es, al mismo tiempo, una condición necesaria, de lo cual nos convencemos de la manera siguiente:

Diferenciando ambos lados respecto a t, obtenemos

$$0 = \int_0^\omega N_0'(t-\tau) f(\tau)\,d\tau$$

para valores discrecionales de t. De ahí resulta que $N'_0(t-\tau) = 0$, o sea, para $N_0(t-\tau) = \text{const}$. A esta constante la designamos por medio de C, introduciéndola en la ecuación (5.7); encontramos inmediatamente que $C = Q_1$.

Por consiguiente, en el período inicial, que tiene una duración ω, es necesario introducir al uso Q_1 objetos en cada momento. En el curso de este período la reserva de los objetos aumenta proporcionalmente al tiempo, hasta que, finalmente, alcanza $\omega Q_1 = N$ objetos. Después del transcurso del tiempo la reserva ω, invariablemente, constituye N objetos, de los cuales en cada momento se renuevan $Q_1 = Ns$ objetos.

6. *La sofocación y el período del ciclo de la renovación.*—Como hemos visto, las oscilaciones que se presentan en el proceso de renovación son sofocadas y se extinguen. El grado de sofocación de las diversas oscilaciones [representadas por los elementos de la suma en el modelo (5.2)], puede ser diferente. El grado de sofocación se mide con la ayuda de $|\alpha_j|$, o sea, del valor absoluto de la parte real del elemento correspondiente en la ecuación característica. En el momento t la amplitud de la oscilación es igual a e^{α_j}; en vista de eso, en el transcurso de una unidad del tiempo la amplitud decrece en relación a

$$\frac{e^{\alpha_j(t+1)}}{e^{\alpha_j t}} = e^{\alpha_j} < 1 \quad (\alpha_j < 0). \tag{6.1}$$

A la magnitud e^{α_j} la denominaremos *coeficiente de sofocación* de la oscilación. Ese coeficiente constituye una magnitud constante (independiente del tiempo); multiplicando la amplitud de las oscilaciones en el momento t por el coeficiente de sofocación, obtenemos la amplitud que existe en el momento $t + 1$. Puesto que $\alpha_j < 0$, el coeficiente de sofocación es tanto menor cuanto menor es el valor α_j; es decir, cuanto mayor es el valor absoluto $|\alpha_j|$. Por esta razón, dicho valor sirve como medida del *grado de oscilación.*

Si los valores α_j de las oscilaciones respectivas son diferentes, son distintos los grados de la sofocación de éstas y es diferente la velocidad con que se extinguen. Como resultado, unas oscilaciones se extinguen más rápidamente que otras y la que perdura por más tiempo que las demás es la oscilación para la cual $|\alpha_j|$ tiene menor valor. A esta oscilación la denominaremos *oscilación dominante.* El coeficiente de sofocación y el grado de la sofocación de la oscilación dominante los definimos como coeficiente y grado de sofocación del ciclo de la renovación.

El grado de sofocación del ciclo de la renovación está determinado, por lo tanto, por medio de $\min |\alpha_j|$. Trataremos de evaluar dicho valor. Con este fin, como método más cómodo, se emplea el desarrollo del logaritmo (natural) de la ecuación característica en un orden potencial mediante los cumulantes, o sea, por medio del polinomio (4.6).

Las primeras aproximaciones efectuadas por medio del polinomio de segundo grado de la ecuación cuadrada

$$-k_1 + \frac{k_2}{2!}\varrho - \frac{k_3}{3!}\varrho^2 = 0. \tag{6.2}$$

De otra fuente sabemos que los elementos de esta ecuación son combinados y, por la misma razón, son conjugados, y ambos tienen el mismo valor de la parte real, o sea, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. De la teoría de las ecuaciones cuadradas se sabe que

$$\alpha = -\frac{1}{2}\left(\frac{k_2}{2!} - \frac{k_3}{3!}\right).$$

De ahí encontramos

$$|\alpha| = \frac{3}{2}\left|\frac{k_2}{k_3}\right|. \tag{6.3}$$

De la relación (4.7) comprobamos que el segundo y tercer cumulante son iguales a los momentos centrales correspondientes, lo que designamos de la siguiente manera:

$$\begin{cases} k_2 = \mu_2 = \sigma^2, \\ k_3 = \mu_3. \end{cases} \tag{6.4}$$

Aquí μ_2 y μ_3 representan el segundo y tercer momentos centrales; σ^2 representa la facultad de variación. Como consecuencia, la evaluación (6.3) puede anotarse en forma de

$$|\alpha| = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{|\mu_3|}. \tag{6.5}$$

Puesto que $\alpha < 0$, tiene que realizarse $\mu_3 < 0$; es decir, la distribución de probabilidades durante la cual los objetos salen del uso tiene que ser oblicua por el lado izquierdo. Esto significa que los objetos más grandes que salen del uso a una edad más avanzada que la edad media de eliminación tienen, *por lo general,* una probabilidad de eliminación mayor que los objetos que salen del uso a una edad más temprana.

Resulta que el grado de sofocación del ciclo, que en este caso es igual a $|\alpha|$, es proporcional a σ^2, o sea, a la variabilidad de la distribución de probabilidades de la edad de los objetos al salir éstos del uso. Cuanto mayor es la variabilidad tanto más rápidamente se extingue el ciclo; por otra parte, cuando $\sigma^2 \to 0$, $|\alpha| \to 0$; es decir, el ciclo deja de extinguirse [9].

[9] Llegamos entonces al caso particular arriba mencionado en que todos los objetos tienen el mismo período de utilización. En este caso la función de concentración de probabilidades $f(\tau)$ deja de ser continua; tenemos entonces $f(\tau) = 0$ para

La evaluación más minuciosa del grado de sofocación la obtenemos empleando un polinomio de mayor grado. Examinemos la ecuación de grado $2n$.

$$(6.6) \qquad -k_1 + \frac{k_2}{2!}\varrho + \ldots + \frac{k_{2n}}{(2n)!}\varrho^{2n-1} \frac{k_{2n+1}}{(2n+1)!}\varrho^{2n} = 0.$$

Los elementos de esta ecuación constituyen parejas conjugadas, por lo que la suma de todos los elementos es igual a la de las partes reales de éstas, y las partes reales se repiten dos veces; por consiguiente, basta examinar entre éstas, n, digamos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Entre los elementos y los coeficientes de la ecuación (6.6) se opera —como es sabido— la siguiente relación:

$$(6.7) \qquad \varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_{2n} = -\left(\frac{k_{2n}}{(2n)!} - \frac{k_{2n+1}}{(2n+1)!}\right).$$

Considerando el hecho de que los elementos están combinados y conjugados por parejas, tenemos

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = (2n+1)\frac{k_{2n}}{k_{2n+1}},$$

de donde

$$(6.8) \qquad |\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n| = \frac{2n+1}{2}\left|\frac{k_{2n}}{k_{2n+1}}\right|.$$

Designando el término medio aritmético que se encuentra del lado izquierdo de esta expresión mediante $\bar{\alpha}$ (o sea, $n\bar{\alpha} = |\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n|$), obtenemos

$$(6.9) \qquad \bar{\alpha} = \frac{2n+1}{2n}\left|\frac{k_{2n}}{k_{2n+1}}\right| \simeq \left|\frac{k_{2n}}{k_{2n+1}}\right|.$$

$0 \leqslant \tau < \omega$, así como también $f(\tau) = 1$ para $\tau = \omega$. Como resultado, el momento r es igual a

$$m_r = \int_0^{\omega} \tau^r f(\tau)\, d\tau = \omega^r.$$

Considerando las relaciones (4.7), encontramos en este caso particular que

$$\sigma^2 = k_2 = 0 \quad \text{así como también} \quad \mu_3 = k_3 = 0.$$

El modelo (6.5) se convierte entonces en un modelo indefinido y no se puede aplicarlo.

Puesto que todos los α_j tienen el mismo signo (son negativas); por consiguiente, $\min_j |\alpha_j| < \bar{\alpha}$. De ahí resulta que

$$\min_j |\alpha_j| \leqslant \frac{2n+1}{2n} \left| \frac{k_{2n}}{k_{2n+1}} \right|. \tag{6.10}$$

Dicha evaluación determina el límite superior del ciclo de la renovación.

Con la ayuda del polinomio (4.6) también puede obtenerse una evaluación aproximada de los coeficientes β_j que se presenta junto a la parte imaginaria de los elementos de la ecuación característica (recordamos que $\varrho_j = \alpha_j + i\beta_j$). Tomando la ecuación cuadrada (6.2), y considerando que ambos elementos combinados de ésta son acoplados, encontramos

$$(\alpha + \beta i)(\alpha - i\beta) = \alpha^2 + \beta^2 = -\frac{3!\,k_1}{k_3}. \tag{6.11}$$

En vista de eso,

$$\beta = \sqrt{-\frac{\sigma k_1}{k_3} - \alpha^2}.$$

Considerando las relaciones mencionadas que existen entre los cumulantes y los momentos, obtenemos

$$\beta = \sqrt{-\frac{\sigma m_1}{\mu_3} - \alpha^2}, \tag{6.12}$$

y, al mismo tiempo, $\alpha^2 = \frac{9}{4}\left(\frac{\sigma^2}{\mu_3}\right)^2$, al tomar en cuenta (6.5). Como sabemos, $\mu_3 < 0$ y $m_1 > 0$; por consiguiente, la expresión que se encuentra debajo del elemento es positiva [10].

Por medio de T designamos el período del ciclo de renovación. Tenemos $\beta T = 2\pi$; por esta razón

$$T = \frac{2\pi}{\beta}.$$

De ahí encontramos

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{-\frac{\sigma m_1}{\mu_3} - \alpha^2}}. \tag{6.13}$$

[10] Puesto que $\mu_3 = k_3 < 0$, introducimos el signo menos en el lado derecho del modelo (6.11).

Esta es la evaluación del período del ciclo de la renovación con base en un polinomio de segundo grado.

Es evidente que T es tanto mayor cuanto mayor es el grado de sofocación del ciclo $|\alpha|$. En otras condiciones dadas los ciclos sofocados de una manera más fuerte son más largos que los ciclos sofocados de una más débil, o, en otras palabras: los ciclos sofocados débilmente tienen una frecuencia mayor que los ciclos sofocados de una manera más fuerte [11]. Por otra parte, sin embargo, cuando existen otras determinadas condiciones, T es tanto mayor cuanto menor es m_1; es decir, edad media de los objetos que salen de uso [12]. Cuanto más tiempo «viven» los objetos tanto más corto es el ciclo de la renovación. A grandes rasgos se puede sostener que la duración (el período) del ciclo de renovación está en relación inversa a la raíz cuadrada de la edad media de los objetos que salen de uso. Esto se explica por el hecho de que cuanto más tiempo «viven» los objetos tanto mayor es el campo de oscilación del número de objetos restituidos durante el período dado. Tanto mayor es la frecuencia de las oscilaciones y, por lo tanto, es más corto el ciclo de la renovación. Finalmente, el incremento de la oblicuidad absoluta de distribución de probabilidad de la edad en la cual los objetos se retiran de uso, o sea, el incremento de $|\mu_3|$ actúa de la misma manera que las disminuciones de la duración de la edad media de la «vida» de los objetos m_1; es decir, conduce a la prolongación del ciclo de la renovación.

7. *El proceso de renovación a saltos.*—El lado derecho de la ecuación de la renovación (2.1) también puede expresarse en forma de integral de Stieltjes. Con ese fin escribimos $f(\tau)d\tau = -dl(\tau)$. La ecuación de renovación toma entonces la forma de

$$N_0(t) = -\int_0^{\infty} N_0(t-\tau)\,dl(\tau). \tag{7.1}$$

De esta forma la ecuación de renovación puede interpretarse de un modo más general, que abarca tanto el proceso continuo de renovación como el que se efectúa por salto (discrecional).

Si el proceso de renovación es continuo, existe una concentra-

[11] La frecuencia se define como inversión del período de oscilación; para el ciclo de renovación la frecuencia, por consiguiente, es $\frac{1}{T}$.

[12] Observemos que la expresión $-\frac{\sigma m_1}{\mu_3}$ que aparece en el modelo (6.13) es positiva.

ción de probabilidades $f(\tau)$, en tanto que en el proceso que se efectúa a saltos la variable acepta únicamente la progresión de valores discrecionales. Para simplificar suponemos que los intervalos que existen entre estos valores son iguales y, por consiguiente, adquieren valores enteros 1, 2, 3, . . .En este caso $dl(\tau)$ también cambia de un modo discrecional, tomando valores $dl(1)$, $dl(2)$, . . ., $dl(\omega)$, siendo a la vez $dl(s) = l(s+1) - l(s)$ para $s = 1, 2, \ldots, \omega$.

Escribiendo $p_s = -dl(s)$, la ecuación (7.1) puede presentarse en forma de

$$N_0(t) = \sum_{s=1}^{\omega} N_0(t-s)\, p_s . \tag{7.2}$$

Esta es la ecuación a saltos discrecional de la renovación.

Dicha ecuación constituye una ecuación diferencial lineal (de orden ω) y la solución de ésta tiene la forma de

$$N_0(t) = \sum_{j=1}^{\omega} Q_j(t)\, \lambda_j^t , \tag{7.3}$$

donde λ_j son elementos de la ecuación característica y $Q_j(t)$ son polinomios ωt de un grado menor que el rango del elemento. Debido al carácter discrecional del proceso, la variable t también toma sólo valores enteros.

La ecuación característica también tiene la forma de

$$\lambda - p_1 \lambda^{\omega-1} - \ldots - p_\omega = 0 . \tag{7.4}$$

Puesto que $\sum_{s=1}^{\omega} p_s = 1$ (la suma de los coeficientes de la probabilidad de eliminación), esta ecuación tiene entre otras cosas el elemento $\lambda = 1$, el cual es de rango 1. Por esta razón, la función (discrecional) de renovación [resolución de la ecuación (7.1)] puede escribirse en forma de

$$N_0(t) = Q_1 + \sum_{j=2}^{\omega} Q_j(t)\, \lambda_j^t . \tag{7.5}$$

En contraste a la función de renovación continua (3.4), la suma que se encuentra del lado derecho abarca un número finito de componentes [13].

[13] Esto se vincula a la existencia del límite superior finito de la edad de los objetos ω. Si $\omega = \infty$, la ecuación (7.4) se convierte en una ecuación de grado infinito y el número de componentes que se encuentran bajo el signo de la suma se convierte en un número infinito.

Es posible demostrar que los elementos restantes de la ecuación característica (7.4), o sea, λ_2, λ_3, ..., son todos negativos, y que su valor absoluto es menor de uno (con la excepción de un caso particular, cuando todos los objetos tienen el mismo tiempo de utilización, siendo entonces $|\lambda_j| = 1$). En vista de eso, los componentes que se encuentran bajo el signo de la suma de la fórmula (7.5) tienen carácter oscilatorio.

Este resultado puede obtenerse directamente de las fórmulas (3.2) y (3.5) mediante la interpretación de las mismas. Reemplazamos las integrales que aparecen en estas fórmulas por las integrales de Stieltjes de manera similar como en la fórmula (7.1). Entonces dichos modelos corresponden al proceso discrecional de renovación, el cual estamos examinando ahora. En estos modelos escribimos $e^{\rho j} = \lambda_j$, y de la fórmula (3.4) obtenemos inmediatamente la función discrecional de renovación (7.5). Al elemento real $\varrho = 0$ de la ecuación característica (3.2) le corresponde el elemento $\lambda = 1$ de la ecuación (7.4). En tanto que en el caso de los elementos combinados escribimos $e^{\alpha_j} = |\lambda_j|$, donde α_j constituye la parte real del elemento ϱ_j. Además, damos por supuesto que λ_j tiene el mismo signo que α_j; es decir, el signo $\lambda_j = \text{sign } \alpha_j$. Omitiendo el caso especial en el que todos los objetos tienen el mismo período de renovación, $\alpha_j < 0$, y, por lo tanto, $e^{\alpha_j} < 1$, o sea, $\lambda_j < 0$ y $|\lambda_j| < 1$. Como resultado, los componentes que se encuentran bajo la suma del lado derecho del modelo (7.5) presentan oscilaciones sofocadas.

Capítulo IV

CONDICIONES DE EQUILIBRIO DE LA REPRODUCCION

El proceso de la reproducción requiere que se elaboren constantemente determinados productos. La renovación de los medios de producción requiere que se reconstruyan los medios del capital fijo que salen del uso y los del capital circulante desgastados. La renovación de la fuerza de trabajo requiere que se elaboren bienes de consumo correspondientes, llamados medios de vida, indispensables para el mantenimiento. Los requisitos de la reproducción determinan, por consiguiente, la elaboración de determinadas cantidades de productos, así como también la forma efectiva de éstos. Por otra parte, la producción puede elaborar —y exceptuando las sociedades primitivas, como regla, elabora— cierto excedente de productos, cuyo conjunto llamamos producto excedente.

El producto excedente puede abarcar diversos tipos de medios de consumo y entonces el número y la calidad de los productos elaborados sobrepasan los medios de consumo indispensables para el mantenimiento. El destino de estos medios de consumo adicionales depende de las características de la formación social, en cuyo marco se lleva a cabo el proceso de reproducción. En las formaciones sociales basadas en el modo de producción antagónico los medios de consumo adicionales, en su mayor parte, son consúmidos por la clase (o clases) de propietarios de los medios de producción y por las capas sociales ligadas a ésta, así como también por empleados que efectúan para éstos los diversos servicios. En situaciones especiales los propietarios de los medios de producción pueden verse obligados a ceder cierta parte de los medios de consumo adicionales a los trabajadores que laboran en el proceso productivo. En las formaciones basadas en un modo de producción no antagónico los medios de consumo adicionales son consumidos por los propios trabajadores ocupados en el proceso productivo, así como también por los empleados que efectúan los servicios para estos mismos trabajadores. Aparte de esto, el producto adicional puede también abarcar los medios de producción. Dichos medios

de producción constituyen el excedente de la cantidad (y eventualmente también la calidad efectiva) de los medios de producción necesarios para la renovación. En consecuencia, sobreviene un incremento de la reserva de los medios de producción, se realiza la reproducción en escala ampliada (en contraste a la reproducción simple, que tiene lugar cuando el producto adicional no contiene medios de producción). El incremento de la reserva de los medios de producción que se presenta en el proceso de la reproducción ampliada la denominamos *acumulación* [1]. La acumulación de los medios de producción generalmente requiere un aumento de la fuerza de trabajo ocupada en efectuar el trabajo junto a los medios de producción adicionales. Por esta razón, cuando existe la reproducción ampliada, una parte de los medios de consumo adicionales tiene que ser usada como el medio imprescindible para el mantenimiento de la fuerza adicional de trabajo. En el proceso de la reproducción en escala ampliada una parte del producto adicional toma la forma de medios de producción, así como también de medios imprescindibles para el mantenimiento.

La producción tiene que ser adaptada a las necesidades de la renovación y, tratándose de la reproducción en escala ampliada, también a las necesidades de la acumulación de los medios de producción. Esta adaptación significa que es necesario elaborar medios de producción en su forma efectiva y en cantidad que se requiere para la renovación de los medios de producción desgastados y eventualmente también para la acumulación. Cada medio de acumulación desgastado —fijo o circulante— tiene que ser sustituido por un medio producido de nuevo. Cada medio de producción agregado a la reserva existente de los medios de producción también tiene que ser producido. Tienen que ser elaborados los medios imprescindibles para el mantenimiento de la fuerza de trabajo empleada y eventualmente también para la fuerza adicional de trabajo, ocupada a consecuencia de la acumulación. Los requisitos de la reproducción determinan, por lo tanto, los productos que tienen que elaborarse, la cantidad de éstos y su forma efectiva; por esa

[1] Por acumulación entendemos el acopio de productos para su uso futuro (o utilización). Se pueden acumular tanto los medios de producción (capital fijo y circulante) como también los medios de consumo (fijos, como las casas-habitación o artefactos necesarios para la economía doméstica, y los no fijos, como, por ejemplo, los medios de alimentación). La reproducción ampliada se basa en la acumulación de los medios de producción, y la acumulación de los medios de consumo está vinculada a la cuestión de la estructura del consumo, así como también a la distribución de ésta en el tiempo.

misma razón también determinan las relaciones cuantitativas (proporciones) necesarias para la elaboración de los productos respectivos. En otras palabras: los requisitos de la reproducción determinan tanto la estructura efectiva como la cuantitativa del proceso productivo.

Si la producción, en la manera descrita, está adaptada a los requisitos de la reproducción, decimos que se realiza *equilibrio del proceso de la reproducción*. Se elaboran exactamente tales productos y en cantidades tales como lo requiere el transcurso del proceso de reproducción. Si no existe este equilibrio, el proceso sufre perturbación (o desequilibrio): se producen entonces demasiados o insuficientes productos. Si los determinados medios de producción se elaboran en cantidad insuficiente, se hace imposible la acumulación prevista o, en última instancia, también la renovación de los medios de producción; la reproducción en escala ampliada, o bien aun la simple, se vuelven imposibles. Si los medios imprescindibles para el mantenimiento se producen en cantidad insuficiente, puede sobrevenir la imposibilidad de ocupar la fuerza adicional de trabajo, o también puede frenarse totalmente la renovación de la fuerza de trabajo existente; en estos casos decimos que en el proceso de la reproducción se presentan *gargantas estrechas* [2] que perturban el transcurso de la reproducción.

Entre tanto, si ciertos productos se elaboran en cantidades demasiado grandes en relación a las necesidades del proceso de la reproducción, decimos que se presenta *sobreproducción*. Siendo así, se perturba el transcurso de la reproducción, porque en el futuro no sería posible continuar la excesiva producción de los productos dados. Frecuentemente la sobreproducción se vincula a una producción insuficiente de otros productos, o sea, a la aparición de «gargantas estrechas». Entonces hablamos de las *desproporciones* del proceso de la reproducción. Las «gargantas estrechas», la sobreproducción y, hablando de una manera más general, las desproporciones constituyen perturbaciones del proceso de la reproducción. El equilibrio del proceso reproductivo es condición necesaria para un *transcurso llano* de éste, es decir, para un transcurso sin perturbaciones.

Es evidente que el equilibrio del proceso de la reproducción requiere que se cumpla una serie de igualdades entre la producción de los productos correspondientes y la demanda de dichos produc-

[2] En inglés, *bottlenecks;* en ruso, *uzquiye miesta;* en alemán, *Engpaesse.*

tos, con el objeto de su renovación y acumulación. Con el fin de establecer estas igualdades, recordamos que en el proceso productivo se opera la unificación de los factores productivos personales y efectivos, o sea, unificación del trabajo y de los medios de producción. Durante un proceso técnico dado, al cual consideramos aquí como un proceso establecido, existe una determinada relación cuantitativa entre la cantidad del producto examinado y gasto de los medios de producción respectivos y los diferentes tipos concretos de trabajo. Presentamos esta relación por medio de un esquema [3].

$$\left[\begin{array}{c} Q_1 \\ Q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ Q_r \\ \\ L_1 \\ L_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ L_s \end{array}\right] \longrightarrow \mathbf{P}.$$

En este caso $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$ representan los gastos de los medios de producción correspondientes (circulantes y fijos), y $L_1, L_2, \ldots, L_s$ representan los gastos de los diversos tipos de trabajo vivo. **P** representa la cantidad del producto elaborado (el ingreso).

Supongamos que el número de productos elaborados sea igual a n, y de éstos r son medios de producción y $n - r$ son medios de consumo. Designaremos las cantidades de los medios de producción mediante $P_1, P_2, \ldots, P_r$ y la cantidad de los medios de consumo elaborados mediante $P_{r+1}, P_{r+2}, \ldots, P_n$. Por medio de Q_{ij} designemos el gasto del medio de producción i y mediante L_{kj} el gasto del tipo de trabajo k que exige el elaborar el producto j, dando por supuesto que existen s diferentes tipos de trabajo. Los gastos y los productos se miden en unidades naturales y constituyen flujos. En vista de eso, la relación cuantitativa que existe

[3] Ver el capítulo II.

entre los gastos y los rendimientos durante la elaboración del producto j la escribimos en forma de un esquema:

$$\begin{bmatrix} Q_{1j} \\ Q_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ Q_{rj} \\ L_{1j} \\ L_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ L_{sj} \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{P}_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Cuando los productos se elaboran simultáneamente (entre éstos se producen r medios de producción y $n - r$ medios de consumo) las relaciones cuantitativas citadas pueden presentarse en forma de una tabla (tabla 9). A esta tabla la llamaremos *balance de gastos y resultados de la producción*. Las columnas que se encuentran en los cuatro cuadrantes de la tabla hacen notables los gastos que ocurren durante la producción de las cantidades $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de los productos respectivos. Dichos productos se dividen en me-

TABLA 9

BALANCE DE GASTOS Y RESULTADOS DE LA PRODUCCION

	Gastos que existen durante la producción de los medios de producción	Gastos que existen durante la producción de los medios de consumo	Gastos destinados para la acumulación de los medios de producción	Suma de gastos
Demanda de los medios de producción	Q_{11} Q_{12} ... Q_{1r} Q_{21} Q_{22} ... Q_{2r} . . . . . Q_{r1} Q_{r2} ... Q_{rr}	$Q_{1,r+1}$ ... Q_{1n} $Q_{2,r+1}$ ... Q_{2n} . . . . . $Q_{r,r+1}$ ... Q_{rn}	Q_{1n} Q_{2n} . . . Q_{rn}	Q_1 Q_2 . . . Q_r
Demanda de gastos de trabajo	L_{11} L_{12} ... L_{1r} L_{21} L_{22} ... L_{2r} . . . . . L_{s1} L_{s2} ... L_{rs}	$L_{1,r+1}$ ... L_{1n} $L_{2,r+2}$ ... L_{2n} . . . . . $L_{s,r+1}$ ... L_{sn}	L_{1n} L_{2n} . . . L_{sn}	L_1 L_2 . . . L_s
Las cantidades de productos elaborados	↓ ↓ ... ↓ P_1 P_2 ... P_r	↓ ... ↓ P_{r+1} ... P_n		

dios de producción y medios de consumo, al mismo tiempo los medios de producción los designamos por medio de índices 1, 2, ..., r, y los medios de consumo por medio de índices $r + 1$, $r + 2$, ..., n. Las cantidades de los productos elaborados están presentadas debajo de las flechas que rebasan las columnas (las flechas representan el proceso productivo). Los renglones de la tabla representan la demanda de los medios de producción respectivos, así como también los gastos de trabajo. Una parte del renglón que se encuentra en los cuadrantes representa la demanda de un medio de producción dado, o bien del tipo de trabajo dado durante la elaboración de los productos correspondientes (los cuales se dividen en medios de producción y medios de consumo). Esta es la demanda para fabricar una determinada cantidad de productos, o sea, para conservar la producción en un nivel determinado; por consiguiente, esta es la demanda para la renovación de los medios de producción desgastados y para el mantenimiento constante de los gastos determinados de trabajo; es decir, es la demanda necesaria para la reproducción simple. Asimismo, en cada renglón (a la derecha de los cuadrantes) está presentada la demanda del medio de producción respectivo, o bien del gasto de trabajo necesario para los fines de acumulación de los medios de producción (o sea, para la reproducción en escala ampliada). De la manera correspondiente designamos esta demanda por medio de

$$Q_{1a}, Q_{2a}, \ldots, Q_{ra} \quad \text{así como también} \quad L_{1a}, L_{2a}, \ldots, L_{sa}.$$

Las cantidades que se encuentran a la derecha de la línea vertical doble representan las sumas de todos los términos anteriores del renglón dado; representan, por consiguientes, la demanda conjunta de los medios de producción respectivos, o bien de los gastos de trabajo; por ejemplo:

$$Q_1 = Q_{11} + Q_{12} + \ldots + Q_{1r} + Q_{1,r+1} + \ldots + Q_{1n} + Q_{1a}$$

así como también, de una manera similar

$$L_1 = L_{11} + L_{12} + \ldots + L_{1r} + L_{1,r+1} + \ldots + L_{1n} + L_{1a}.$$

Todos los términos de la tabla 9 se miden en unidades naturales y constituyen flujos, es decir, representan las cantidades por una unidad de tiempo; por ejemplo: un año.

Los términos que se encuentran en los renglones de la tabla (con la excepción sólo del que se encuentra debajo de la línea

horizontal doble) pueden sumarse, porque los términos respectivos de cada renglón se refieren a un mismo producto o tipo de trabajo y se miden en las mismas unidades naturales. En cambio, no pueden sumarse los términos que se encuentran en las columnas, puesto que cada columna abarca términos que se miden en unidades naturales diferentes, como son los gastos de los diferentes medios de producción, así como también los diferentes tipos concretos de trabajo. Las magnitudes $P_1, P_2, \ldots, P_n$, que se encuentran en la parte más baja de la tabla, no constituyen, por consiguiente, sumas, sino que son *el producto* de los gastos presentados en la columna correspondiente; los simbolizamos por medio de las flechas. También debe observarse que los términos respectivos que se encuentran en la tabla (exceptuando los términos que se encuentran a la derecha de la línea vertical doble y los términos presentados debajo de la línea horizontal doble) pueden ser iguales a 0. En consecuencia, si $Q_{ij} = 0$, o bien $L_{kj} = 0$, esto significa que el medio de producción i, o el tipo de trabajo k, no son utilizados durante la elaboración del producto j. Por ejemplo: al producir acero no se utiliza ni algodón ni trabajo de sastrería. En tanto que si los términos individuales que se encuentran en la columna de los gastos destinados para la acumulación son iguales a 0, esto significa que el correspondiente medio de producción, o bien el correspondiente tipo de trabajo, no participa en el proceso de acumulación de los medios de producción. Si todos los términos que se encuentran en esta columna son iguales a 0, no existe la acumulación de los medios de producción: se realiza la reproducción simple.

Con base en la tabla 9, se puede establecer una serie de ecuaciones (así como también de desigualdades) que expresan los requisitos de equilibrio del proceso de la reproducción. Dichas ecuaciones (o bien desigualdades) las denominamos *condiciones de balance.* Para los medios de producción obtenemos r ecuaciones de balance que confirman que la producción de cada medio tiene que ser igual a la demanda de éste; es decir,

$$P_1 = Q_1,$$
$$P_2 = Q_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$P_r = Q_r.$$

Puesto que $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$ son iguales a la suma de los términos que se encuentran en el renglón correspondiente a la izquierda de la línea vertical doble (tabla 9), tenemos

$$
\begin{aligned}
&P_1 = Q_{11} + Q_{12} + \ldots + Q_{1r} + Q_{1,r+1} + \ldots + Q_{1n} + Q_{1a},\\
(1)\quad &P_2 = Q_{21} + Q_{22} + \ldots + Q_{2r} + Q_{2,r+2} + \ldots + Q_{2n} + Q_{2a},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&P_r = Q_{r1} + Q_{r2} + \ldots + Q_{rr} + Q_{r,r+1} + \ldots + Q_{rn} + Q_{ra}.
\end{aligned}
$$

Estas son las *ecuaciones de balance de los medios de producción*. El conjunto de dichas ecuaciones lo llamaremos de una manera abreviada: *balance de los medios de producción*. Este balance comprueba que la parte del último renglón (debajo de la línea horizontal doble) de la tabla 9, que expresa la producción de los medios de producción, es igual a la parte de la última columna (a la derecha de la línea vertical doble), la cual expresa la demanda de los medios de producción. Si esta igualdad se cumple, decimos que se cumple el balance de los medios de producción.

De una manera similar obtenemos el *balance de la fuerza de trabajo*. Para cada tipo de trabajo concreto la demanda no puede exceder la capacidad conjunta de ejecución de este trabajo, o sea, a la fuerza de trabajo de un tipo dado. Si, por medio de $L_1^{(0)}, L_2^{(0)}, \ldots, L_s^{(0)}$ designamos la cantidad de fuerza de trabajo de un tipo particular, entonces el balance de la fuerza de trabajo se presenta en forma de desigualdades de balance:

$$
\begin{aligned}
&L_1^{(0)} \geqslant L_1\\
&L_2^{(0)} \geqslant L_2\\
&\ldots\ldots\\
&L_s^{(0)} \geqslant L_s.
\end{aligned}
$$

Considerando que $L_1, L_2, \ldots, L_s$ son iguales a la suma de los términos del renglón correspondiente que se encuentra a la izquierda de la línea vertical doble, tenemos

$$
\begin{aligned}
&L_1^{(0)} \geqslant L_{11} + L_{12} + \ldots + L_{1r} + L_{1,r+1} + \ldots + L_{1n} + L_{1a},\\
(2)\quad &L_2^{(0)} \geqslant L_{21} + L_{22} + \ldots + L_{2r} + L_{2,r+2} + \ldots + L_{2n} + L_{2a},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&L_s^{(0)} \geqslant L_{s1} + L_{s2} + \ldots + L_{sr} + L_{s,r+1} + \ldots + L_{sn} + L_{sa}
\end{aligned}
$$

Estas son las desigualdades no agravantes, cuando para alguna de ellas se cumple = (es decir, se realiza la igualdad); siendo así, la cantidad de la fuerza de trabajo disponible de un tipo dado queda totalmente agotada. Entre tanto, cuando la desigualdad dada es aguda eso quiere decir que se realiza > y queda un excedente de la fuerza de trabajo que no encuentra empleo dentro del proceso productivo, éste puede encontrar empleo en las ocupaciones no productivas o puede quedar sin empleo.

Designando ese tipo de excedente de la fuerza de trabajo mediante $R_1, R_2, \ldots, R_s$, es posible transformar las desigualdades del balance (2) en ecuaciones, o sea,

$$
\begin{aligned}
L_1^{(0)} &= L_{11} + L_{12} + \ldots + L_{1r} + L_{1,r+1} + \ldots + L_{1n} + L_{1a} + R_1, \\
L_2^{(0)} &= L_{21} + L_{22} + \ldots + L_{2r} + L_{2,r+1} + \ldots + L_{2n} + L_{2a} + R_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
L_s^{(0)} &= L_{s1} + L_{s2} + \ldots + L_{sr} + L_{s,r+1} + \ldots + L_{sn} + L_{sa} + R_s.
\end{aligned} \tag{3}
$$

De esa manera, en lugar de las desigualdades obtenemos *ecuaciones de balance de la fuerza de trabajo.* En el caso en que, por ejemplo, el tipo de la fuerza de trabajo i no demuestra excedente en relación a la demanda, tenemos $R_i = 0$. Desgraciadamente, estas ecuaciones no pueden presentarse en forma de desigualdad de la parte correspondiente del último renglón y de la última columna en la tabla 9, que es lo que sucede cuando se trata de los medios de producción.

Es posible presentar el balance de los medios de producción y el balance de la fuerza de trabajo de una manera abreviada, en forma de vectores. En los conjuntos de ecuaciones (1) y (3) las columnas pueden interpretarse como vectores y pueden designarse por medio de $\mathbf{P}_1, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \ldots, \mathbf{Q}_n, \mathbf{Q}_a$ en las ecuaciones (1), así como también $\mathbf{L}^{(0)}, \mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \ldots, \mathbf{L}_n, \mathbf{L}_a, \mathbf{R}$ en las ecuaciones (3). Recordando que los vectores son iguales sólo y únicamente cuando son iguales las componentes correspondientes de éstos [4], dichas ecuaciones pueden escribirse en una forma abreviada:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + \ldots + \mathbf{Q}_r + \mathbf{Q}_{r+1} + \ldots + \mathbf{Q}_n + \mathbf{Q}_a \tag{1a}$$

así como también

$$\mathbf{L}^{(0)} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \ldots + \mathbf{L}_r + \mathbf{L}_{r+1} + \ldots + \mathbf{L}_n + \mathbf{L}_a + \mathbf{R}. \tag{3a}$$

[4] Ver el capítulo II.

De ese modo el balance de los medios de producción está presentado por medio de una ecuación solamente (la ecuación vectorial) y, de una manera similar, el balance de la fuerza de trabajo está presentado mediante una sola ecuación.

El balance de los medios de producción requiere otro complemento más. Las ecuaciones de balance (1), o bien vectoriales (1a), determinan la producción de los medios de producción respectivos, necesarios para satisfacer las necesidades de la reproducción. No obstante, para que este tipo de producción fuese posible tienen que existir las potencias productivas correspondientes. Es necesario suplementar el balance de los medios de producción con un correspondiente *balance de potencias productivas*. Mediante $\hat{P}_1$, $\hat{P}_2$, ..., $\hat{P}_r$ [5] designamos las potencias productivas existentes en las ramas de la producción que fabrica los medios de producción; en ese caso tienen que cumplirse las desigualdades

$$\begin{aligned} \hat{P}_1 &\geqslant P_1, \\ \hat{P}_2 &\geqslant P_2, \\ &\cdots\cdots \\ \hat{P}_r &\geqslant P_r. \end{aligned} \tag{4}$$

Designando las fuerzas productivas no aprovechadas mediante $\hat{R}_1$, $\hat{R}_2$, ..., $\hat{R}_r$ (en tanto que algunas de éstas, o bien todas, pueden ser iguales a 0), dichas igualdades pueden transformarse en ecuaciones de balance. O sea,

$$\begin{aligned} \hat{P}_1 &= P_1 + \hat{R}_1, \\ \hat{P}_2 &= P_2 + \hat{R}_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \hat{P}_r &= P_r + \hat{R}_r. \end{aligned} \tag{5}$$

Es posible escribirlo en forma de una ecuación vectorial:

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P} + \hat{\mathbf{R}}. \tag{5a}$$

[5] Ver *Observaciones matemáticas*, apéndice del capítulo II, donde se expone la definición de la potencia productiva-modelo (3.2). Recordemos que la potencia productiva depende del equipo técnico y del máximo tiempo de su utilización durante el transcurso de un determinado período de tiempo.

Las potencias productivas, así como también la parte no aprovechada de éstas, podrían introducirse a la tabla 9 (por ejemplo, en forma de versos adicionales colocados en la parte más baja de la tabla). Siendo así, el balance de las potencias productivas encontraría su expresión en la tabla. No lo hacemos para no complicar más la tabla, entendiendo, sin embargo, que el balance de los medios de producción que se deriva de ésta sólo puede cumplirse si se cumple el balance de las potencias productivas.

No obstante, la tabla 9, así como también el balance de los medios de producción basado en ésta (junto con el balance de las potencias productivas) y el balance de la fuerza de trabajo, no demuestran que exista una conexión total entre la producción de los medios de producción, el gasto de trabajo vivo y la producción de los medios de consumo. Aunque el segundo cuadrante de la tabla hace evidente la cantidad de los medios de producción desgastados durante la elaboración de los medios de consumo, la propia producción de los medios de consumo no está sometida aquí a condiciones de balance algunas. Sin embargo, tales condiciones se presentan si tomamos en cuenta que la ejecución de los tipos y cantidades de trabajos respectivos, enumerados en el tercer y cuarto cuadrantes de la tabla (o bien en el balance de la fuerza de trabajo), requiere determinadas cantidades de medios de consumo, los cuales constituyen medios imprescindibles para el mantenimiento de la correspondiente fuerza de trabajo.

Por medio de $Q_{r+1,\,i}, Q_{r+2,\,i}, \ldots, Q_{ni}$, designamos las cantidades de los medios de consumo respectivos, necesarios como medios de mantenimiento, imprescindibles para la fuerza de trabajo que efectúa el trabajo $L_{1i}, L_{2i}, \ldots, L_{si}$, es decir, la fuerza de trabajo empleada en la producción de la cantidad P_i del producto i. Entre los medios de mantenimiento citados se realiza una correspondencia, la cual escribimos en la forma de

$$\begin{bmatrix} Q_{r+1,\,i} \\ Q_{r+2,\,i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Q_{ni} \end{bmatrix} \supset \begin{bmatrix} L_{1i} \\ L_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ L_{si} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

o sea, en forma de la correspondencia que existe entre dos vectores: el vector de los medios imprescindibles para el mantenimiento

y el vector de los gastos de trabajo [6]. Es evidente que algunos componentes de estos vectores pueden ser iguales a 0, como en el caso en que ciertos medios de consumo, durante la fabricación del producto *i*, no formen parte de los medios indispensables para el mantenimiento, o bien cuando no se apliquen ciertos tipos de trabajo.

Al introducir dichas correspondencias en la tabla 9 obtenemos la tabla 10, en la cual en vez de gastos de trabajo aparecen gastos de los medios imprescindibles para el mantenimiento [7].

Denominaremos a la tabla 10 *balance de la producción y demanda de los productos*. La diferencia que existe entre esta tabla y la tabla 9 estriba en que en ésta, en lugar de gastos de trabajo, aparecen gastos indispensables para mantenimiento (los cuadrantes tercero y cuarto, así como también los términos que se encuentran a la derecha de éstos). Además, los gastos (tanto de los medios de producción como de los medios imprescindibles para mantenimiento) destinados para la acumulación de los medios de producción se dividen en dos partes: gastos para aumentar la reserva de los medios de producción en la sección de producción de los me-

[6] Esta correspondencia no constituye una igualdad; los componentes de ambos vectores se miden en unidades naturales diferentes y también es diferente el número de componentes de éstos. La correspondencia que existe entre los vectores se realiza como un todo y no entre las respectivas componentes de éstos. Es posible presentar esta correspondencia más detalladamente de la siguiente manera. Mediante $q_{r+1,ji}$, $q_{r+2,ji}$, ..., $q_{n,ji}$ designamos el conjunto (el vector) de los medios necesarios para el mantenimiento de la fuerza de trabajo que efectúa el trabajo L_{ji}; es decir, el gasto de trabajo *j* durante la producción del producto *i*. Siendo así, podemos escribir las siguientes correspondencias:

$$L_{1i} \sim (q_{r+1,1i}, q_{r+2,1i}, \ldots, q_{n,1i}),$$

$$L_{2i} \sim (q_{r+1,2i}, q_{r+2,2i}, \ldots, q_{n,2i}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$L_{si} \sim (q_{r+1,si}, q_{r+2,si}, \ldots, q_{n,si}),$$

$$(Q_{r+1,i}, Q_{r+2,i}, \ldots, Q_{ni}).$$

Los términos que se encuentran en las columnas del lado derecho pueden sumarse, puesto que se refieren a un mismo medio de consumo y se expresan en las mismas unidades naturales. Designando las sumas de los términos que se encuentran en las columnas por medio de $Q_{r+1,i}$, $Q_{r+2,i}$, ..., Q_{ni} (éstas están escritas debajo de la raya horizontal), obtenemos la correspondencia (6), presentada en el texto.

[7] B. KLAPKOWSKI y A. NYKLIŃSKI presentan una tabla de mantenimiento similar: «Zagadnienie obliczania wartości środków produkcji i środków konsumpcji» (El problema de calcular valores de los medios de producción y de los medios de consumo), *Zeszyty Naukowe Akademii Górniczo-Hutniczej* (Cuadernos Científicos de la Academia de Minería y Siderurgia), Cracovia, núm. 40, 1961, p. 90.

TABLA 10

BALANCE DE LA PRODUCCION Y DE LA DEMANDA DE LOS PRODUCTOS (EN UNIDADES NATURALES)

	Gastos que existen durante la elaboración de los medios de producción	Gastos que existen durante la producción de los medios de consumo	Gastos destinados a la acumulación de los medios de producción	Suma de gastos	Medios de consumo que no constituyen medios indispensables para mantenimiento
Demanda de los medios de producción	$Q_{11}, Q_{12}, \ldots, Q_{1r}$ $Q_{21}, Q_{22}, \ldots, Q_{2r}$ . . . . . . $Q_{r1}, Q_{r2}, \ldots, Q_{rr}$	$Q_{1,r+1}, \ldots, Q_{1n}$ $Q_{2,r+1}, \ldots, Q_{2n}$ . . . . . . $Q_{r,r+1}, \ldots, Q_{rn}$	I II Q_{1a} Q_{1a} I II Q_{2a} Q_{2a} . . . . . . I II Q_{ra} Q_{ra}	Q_1 Q_2 . . . Q_r	
Demanda de los medios de consumo	$Q_{r+1,1}, Q_{r+1,2}, \ldots, Q_{r+1,r}$ . . . . . . $Q_{n1}, Q_{n2}, \ldots, Q_{nr}$	$Q_{r+1,r+1}, \ldots, Q_{r+1,n}$ . . . . . . $Q_{n,r+1}, \ldots, Q_{nn}$	I II $Q_{r+1,a}$ $Q_{r+1,a}$ . . . . . . I II Q_{na} Q_{na}	Q_{r+1} . . . Q_n	M_{r+1} . . . M_n
Cantidades de productos elaborados	$P_1, P_2, \ldots, P_r$	$P_{r+1}, \ldots, P_n$			
Fracción no aprovechada de las potencias productivas	$\hat{R}_1, \hat{R}_2, \ldots, \hat{R}_r$	$\hat{R}_{r+1}, \ldots, \hat{R}_n$			
Potencias productivas	$\hat{P}_1, \hat{P}_2, \ldots, \hat{P}_r$	$\hat{P}_{r+1}, \ldots, \hat{P}_n$			

dios de producción y gastos necesarios para aumentar la reserva de los medios de producción en la sección de producción de los medios de consumo. Los primeros están señalados por medio del índice I y los segundos por medio del II, colocado en la parte superior de ésta. Más adelante nos será necesaria esta diferenciación. Finalmente, en la parte inferior de la tabla 10 se encuentran las potencias productivas no aprovechadas $\hat{R}_i$, así como también las potencias productivas totales $\hat{P}_i$. Esto también resultará útil.

Con base en la tabla 10 establecemos el *balance de los medios de producción,* así como también el balance de los medios de consumo. Estos balances, para los medios de producción, tienen la forma de r ecuaciones:

$$\begin{aligned} P_1 &= Q_1, \\ P_2 &= Q_2, \\ &\cdots\cdots \\ P_r &= Q_r \end{aligned} \tag{7}$$

así como también $n - r$ *desigualdades* para los medios de consumo:

$$\begin{aligned} P_{r+1} &\geqslant Q_{r+1}, \\ P_{r+2} &\geqslant Q_{r+2}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ P_n &\geqslant Q_n. \end{aligned} \tag{8}$$

Las magnitudes que se encuentran en el lado derecho de dichas ecuaciones y desigualdades representan una demanda total de los medios de producción y de los medios indispensables para mantenimiento (las sumas que se encuentran en la tabla 10, del lado derecho de la línea vertical doble). Los medios imprescindibles para el mantenimiento no agotan, sin embargo (como regla), la producción total de los medios de consumo, y por esta razón el balance de los medios de consumo tiene el carácter de una desigualdad. Por medio de M_{r+1}, M_{r+2}, ..., M_n, designamos el excedente de la producción de los medios de consumo respectivos que sobrepasan la demanda de medios indispensables para el mantenimiento. Siendo así, el balance de los medios de consumo puede escribirse en forma de ecuaciones (en lugar de desigualdades); o sea,

$$\begin{aligned} P_{r+1} &= Q_{r+1} + M_{r+1}, \\ P_{r+2} &= Q_{r+2} + M_{r+2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_n &= Q_n + M_n. \end{aligned} \tag{8a}$$

En esta forma, en el balance de los medios de consumo se presentan de una manera clara (del lado derecho) los medios imprescindibles para el mantenimiento, así como también los medios que no constituyen los medios indispensables para el mantenimiento [8].

Inscribiendo las magnitudes M_{r+1}, M_{r+2}, ..., M_n en el lado derecho de la tabla 10, se puede hacer aparente en la tabla el cumplimiento de las condiciones de balance, tanto para los medios de consumo como también para los medios de producción. El cumplimiento de estas condiciones significa que el renglón que se encuentra debajo de la primera línea horizontal doble y contiene las magnitudes de la producción P_1, P_2, ..., P_r es igual a la suma de las dos últimas columnas de la tabla (a la derecha de la línea vertical doble). De esa manera el balance incluye tanto los medios de consumo como los medios de producción.

Está claro que el balance de los medios de producción y el balance de los medios de consumo pueden cumplirse sólo cuando existen las potencias productivas correspondientes. Como complemento hay que añadir el *balance de las potencias productivas*, el cual ahora no sólo abarca la producción de los medios de producción, sino también los medios de consumo. Como se ha hecho anteriormente, designamos las potencias productivas por medio de $\hat{P}_i$ y por medio de $\hat{R}_i$ la fracción de las potencias productivas no aprovechadas, este balance se presenta en la forma de n ecuaciones.

$$
\begin{aligned}
\hat{P}_1 &= P_1 + \hat{R}_1, \\
\hat{P}_2 &= P_2 + \hat{R}_2, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\hat{P}_n &= P_n + \hat{R}_n.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

[8] Marx usaba el término «artículos de lujo» para definir los medios de consumo que no son indispensables para el mantenimiento. Ver *El Capital*, t. II, p. 359. En las condiciones actuales esta definición puede suscitar malentendimientos. Los medios de vida necesarios dentro de una sociedad industrial desarrollada (socialista o capitalista) abarcan lo que en las etapas anteriores del desarrollo se consideraban como objetos de lujo, y frecuentemente en el lenguaje cotidiano también ahora se consideran como tales. Por ejemplo: automóvil, libros, aparato de televisión, etc. para muchos trabajadores constituyen medios imprescindibles de mantenimiento, necesarios para llegar al lugar de trabajo, o bien para conservar o perfeccionar las cualificaciones profesionales. Asimismo, Marx (en el lugar citado) afirma que una parte de los medios de vida necesarios es adquirida por los capitalistas, o sea, lleva a cabo una división entre los medios de vida necesarios y los artículos de lujo, en base a las características naturales de los productos, y no en base a la función que éstos tienen en el proceso de reproducción. Este tipo de división oscurece la problemática de la renovación de la fuerza de trabajo. Nuestra definición de los medios de vida necesarios es puramente funcional, abarca todos los medios de consumo necesarios para la renovación de la fuerza de trabajo y estos medios solamente. La forma natural es indiferente.

Dichas ecuaciones abarcan tanto los medios de producción como los medios de consumo.

El balance de las potencias productivas está presentado en la parte inferior de la tabla 10. El renglón que se encuentra en la parte inferior (debajo de la segunda línea horizontal doble) tiene que ser igual a la suma de los dos renglones que se encuentran directamente encima de éste (es decir, entre las dos líneas horizontales dobles). De ese modo la tabla 10 hace evidente la totalidad de las condiciones de balance que se presentan en el proceso de reproducción de los medios de producción, así como también de los medios de consumo.

Resulta que todas las condiciones de balance del proceso de la reproducción, expresadas mediante las ecuaciones (7), (8a) y (9), están presentadas en la tabla 10 en forma de desigualdades que existen entre los correspondientes renglones y columnas (o entre las sumas de los renglones o bien de las columnas). Interpretando dichos renglones y columnas como vectores, es posible expresar la totalidad de las condiciones de balance en forma de dos ecuaciones vectoriales, o sea:

(7a,8b) $\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{M}$ (para los medios de producción $\mathbf{M} = \mathbf{O}$)

así como también

(9a) $$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P} + \hat{\mathbf{R}}.$$

La primera de estas ecuaciones expresa el balance conjunto de los medios de producción y los medios de consumo; es decir, el balance de la producción y de la demanda de los productos [las ecuaciones (7) y (8a)] y la segunda ecuación expresa el balance de las potencias productivas [las ecuaciones (9)]. En consecuencia, la tabla 10 ilustra la conformación total del proceso de la reproducción. El conjunto total de productos elaborados en el curso del período de tiempo dado (por ejemplo, en un año) constituye un *producto social global.* Este es visible en la tabla, el verso que se encuentra debajo de la primera línea horizontal doble, abarca la cantidad de todos los productos elaborados $P_1, P_2, \ldots, P_n$, es decir, el vector **P.** La tabla presenta la estructura del producto social global. Las magnitudes Q_{ij}, contenidas en los cuatro cuadrantes, representan la fracción del producto social necesaria para asegurar la reproducción simple. De manera correspondiente, esta fracción está dividida en medios de producción y en medios de vida necesarios;

además, la tabla indica la parte correspondiente de los medios de producción destinados a la renovación y de los medios de vida necesarios, indispensables en los procesos que elaboran medios de producción y medios de consumo. A la derecha de los cuatro cuadrantes de la tabla encontramos el producto adicional. Este abarca las columnas $\overset{I}{Q}_{ia}$ y $\overset{II}{Q}_{ia}$, así como también la última columna M_i.

Como se ve, el producto excedente puede presentarse en forma de una suma de vectores:

$$\overset{I}{\mathbf{Q}}_a + \overset{II}{\mathbf{Q}}_a + \mathbf{M}.$$

Los dos primeros componentes de esta suma representan la fracción del producto excedente destinada a la acumulación de los medios de producción, es decir, a asegurar la reproducción en escala ampliada, en tanto que el primer componente está asignado para la ampliación de la producción de los medios de producción, y el segundo para la ampliación de la producción de los medios indispensables de consumo. En la tabla 10 está presentada la división interna de cada uno de estos componentes en medios de producción y medios de consumo (medios imprescindibles para la subsistencia). El último componente representa los medios de consumo que no constituyen medios imprescindibles para la subsistencia. Estos medios no participan en el proceso de la reproducción, sino que constituyen el *excedente puro* de dicho proceso (que también supera a la reproducción en escala ampliada). Si el consumo de los medios necesarios para la subsistencia puede definirse como *consumo reproductivo*, el consumo del excedente citado puede definirse como *consumo puro*.

La tabla 10 representa el proceso de reproducción en su aspecto *estructural*, descompone las magnitudes respectivas que se presentan en el proceso reproductivo en fracciones, en componentes de las sumas (que se encuentran en los renglones de la tabla) o bien en componentes de los vectores (que se encuentran en las columnas de la misma). No obstante, en el proceso de reproducción constantemente se opera el desgaste y la reposición de los productos y, además, sobreviene la ampliación de la producción a causa de la acumulación [9]. Por consiguiente, el proceso reproduc-

[9] No abordamos aquí el fenómeno de la reproducción restringida por considerarlo un caso hasta cierto punto excepcional. En fin, este caso puede formalmente considerarse como una reproducción a escala ampliada de tipo singular en la que la acumulación de los medios de producción constituye una magnitud negativa.

tivo constituye un proceso de «movimiento» continuo en el que se efectúa una transformación continua de una magnitud en otra. Los objetos materiales respectivos cambian su función económica. Siendo productos finales del proceso reproductivo, se transforman en medios de producción, o bien en medios necesarios de subsistencia; de la esfera de los medios de consumo pasan al campo de los medios de producción (como medios imprescindibles de subsistencia); de fracciones de que se componía el producto excedente se transforman en medios de producción y en medios imprescindibles de subsistencia (durante la acumulación de los medios de producción), etc.

Para captar este movimiento —la transformación de la función económica, cumplida por los diversos objetos materiales— hay que dividir la economía social en una serie de sectores y eventualmente dividir también los mismos en subsectores, o sea, ramas que corresponden a las funciones económicas particulares que cumplen el objeto material respectivo en el proceso de la reproducción. Siendo así, la transformación de la función cumplida por el objeto material puede interpretarse como tránsito, o bien *transferencia,* como generalmente decimos, de un sector al otro (o bien de una rama a la otra) [10].

[10] El primero que concibió el proceso de reproducción en forma de «movimiento», en el que los objetos reales pasan de uno a otro sector de la economía social, fue Quesnay, el fundador de la escuela de los fisiócratas. En el año 1758 publicó una obra bajo el título *Tableau économique avec explication.* En esta obra presenta «la circulación» de los productos que se lleva a cabo entre las diferentes clases de la sociedad, cada una de las cuales cumple una función determinada en el proceso de la reproducción. El presentó este proceso en forma de una tabla a la que llamó *tableau économique.* Sobre Quesnay ver C. MARX, *Teoría de la plusvalía,* ed. Alberto Corazón, Madrid, 1974, parte I; J. ZAGÓRSKI, *Ekonomia Franciszka Quesnay'a* (Economía de Francisco Quesnay), Varsovia, 1963, cap. I, XI y XIV; así como también W. NIEMCZYNOW, *Metody i modele ekonomiczno-matematyczne* (Métodos y modelos económico-matemáticos), Varsovia, 1964, cap. V. Posteriormente, en la tercera parte del segundo tomo de *El Capital* MARX presentó un amplio análisis del proceso de reproducción, basado en la «transferencia» de los productos del sector que produce los medios de producción al sector que produce los medios de consumo y viceversa. En este análisis Marx fue el primero que formuló las condiciones de equilibrio del proceso de reproducción y las presentó en forma de esquemas numéricos y algebraicos. Sobre esta base Marx creó toda la teoría de la reproducción. Aunque esta teoría, en principio, está basada en la investigación de la reproducción que existe en las condiciones del modo de producción capitalista, esta teoría, como el propio Marx señala, tiene una aplicación más amplia; una parte de la misma se aplica en el proceso de reproducción en todas las formaciones sociales (ver *El Capital,* t. II, p. 385). Marx también expone extensas observaciones sobre el tema de la teoría de la reproducción en *Teoría de la plusvalía,* ed. cit., pp. 53-69. Ver también la carta de Marx a Engels del día 6 de julio de 1863, en la cual Marx presenta por primera vez los principios de su teoría de la reproducción y exhibe la

En relación a eso, dividimos la economía social en dos sectores fundamentales: medios de producción y medios de consumo. Estos sectores —según Marx— los designamos mediante I y II. «Dentro de cada uno de estos dos sectores —dice Marx— las distintas ramas de producción a él pertenecientes forman en conjunto una gran rama de producción; de un lado, la que produce medios de producción; de otro, la que produce medios de consumo» [11]. Durante el proceso de la reproducción se opera la transferencia de los productos de una sección a la otra o bien —como lo define Marx— entre los sectores se opera intercambio de productos [12]. Con el

tabla, tomando como modelo la *tableau économique* de Quesnay, con quien además compara su tabla (ver C. MARX y F. ENGELS, *Cartas sobre «El Capital»*, ed. Laia, Barcelona, 1974, pp. 109-112). La teoría de la reproducción de Marx no fue conocida durante mucho tiempo, el segundo tomo de *El Capital* apareció apenas en el año 1885 (editado por Engels dos años después de la muerte de Marx). Sin embargo, aun después de su publicación, la teoría de la reproducción de Marx atrajo poca atención. Esta fue «descubierta» solamente a fines del siglo XIX. Dos hechos contribuyeron a eso. El primero fue la controversia que se entabló entre los marxistas y los «naródniki» en Rusia sobre el tema de la posibilidad de que se creara un mercado que pudiese proporcionar a Rusia un posible desarrollo del modo de producción capitalista. En esta discusión intervino Lenin con un análisis basado sobre el esquema de la reproducción de Marx, publicado en el año de 1893 en el ensayo «El llamado problema de los mercados» (V. I. LENIN, *Obras completas*, t. I, Ed. Akal-Ayuso, Madrid, 1974, pp. 85-136). En este ensayo Lenin desarrolla ulteriormente los esquemas de Marx; ver sobre este tema W. NIEMCHYNOV, *Ekonomicheskomatematicheskiye metody i modeli*, ed. cit., pp. 197-211. El segundo hecho constituyó la intervención del economista ruso M. Tugan-Baranovski con la tesis de que el capitalismo como sistema económico tiene ilimitadas posibilidades de desarrollo *(Studia o teorii torgovyj krizisov v Anglii* (Estudio sobre la teoría de las crisis comerciales en Inglaterra), San Petersburgo, 1894. Tugan-Baranovski fundamentó su tesis con la ayuda de los esquemas de la teoría de la reproducción de Marx. Esto provocó una polémica ampliamente difundida, en la cual la teoría de la reproducción de Marx, y sobre todo sus esquemas, se convirtieron en instrumento básico de la argumentación. De los escritos más importantes que se relacionan con este tema vale la pena mencionar *Kapital finansowy* (El capital financiero), de R. HILFERDING, Varsovia, 1858 (la primera edición alemana, 1910); ROSA LUXEMBURGO, *Akumulacja kapitalu* (La acumulación del capital) (traducción polaca), Varsovia, 1963 (el original alemán apareció en el año 1913); OTTO BAUER, *Die akkumulation des Kapitals*, «Die Neue Zeit», anal XXXI, 1913; HENRYK GROSSMAN, *Das Akkumulations- und Zusammenbruchgesetz des kapitalitischen System*, Leipzig, 1929. Sobre el tema de los esquemas de la reproducción de Marx, ver también O. LANGE, *Teoria reprodukcji i akumulacji*, ed. cit., caps. I y II, [véase traducción castellana citada]. La teoría de Marx constituye la base de todos los análisis contemporáneos del proceso de la reproducción. Sus principios primordiales fueron asimilados (y algunas veces «descubiertos» de nuevo) por muchos economistas que se dedicaban a ese problema y también por los economistas que, por otra parte, están alejados de la concepción marxista de la economía política. En referencia a eso ver O. LANGE, *Ekonomia polityczna w Wielkiej Encyklopedii Powszechnej*, PWN, t. III, Varsovia, 1964, p. 332.

[11] C. MARX, *El Capital*, t. II, p. 353.

[12] Idem, p. 355.

$$
(10)\quad
\begin{array}{lllllllll}
P_1 & = Q_{11} + Q_{12} + \dots + Q_{1r} + Q_{1a} + & Q_{1,r+1} + \dots + Q_{1n} + Q_{1a} \\
P_2 & = Q_{21} + Q_{22} + \dots + Q_{2r} + Q_{2a} + & Q_{2,r+1} + \dots + Q_{2n} + Q_{2a} \\
\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\
P_r & = Q_{r1} + O_{r2} + \dots + Q_{rr} + Q_{ra} + & Q_{r,r+1} + \dots + Q_{rn} + Q_{ra} \\
\\
P_{r+1} & = Q_{r+1,1} + Q_{r+1,2} + \dots + Q_{r+1,r} + Q_{r+1,a} & + Q_{r+1,r+1} + \dots + Q_{r+1,n} + Q_{r+1,a} + M_{r+1} \\
P_{r+2} & = Q_{r+2,1} + Q_{r+2,2} + \dots + Q_{r+2,r} + Q_{r+2,a} & + Q_{r+2,r+1} + \dots + Q_{r+2,n} + Q_{r+2,a} + M_{r+2} \\
\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
P_n & = Q_{n1} + Q_{n2} + \dots + Q_{nr} + Q_{na} & + Q_{n,r+1} + \dots + Q_{nn} + Q_n + M_n .
\end{array}
$$

fin de presentar este intercambio, escribimos las ecuaciones de balance de los medios de producción y de los medios de consumo (7) y (8a) en una forma desarrollada, o sea, en el lado derecho de estas ecuaciones, en lugar de Q_i, inscribimos las correspondientes sumas que proceden de los renglones de la tabla 10. Trasponiendo un poco el orden de los componentes, obtenemos el sistema de ecuaciones (10).

El intercambio que existe entre los dos sectores está presentado en el sistema de ecuaciones (10). El sector I transmite al sector II los medios de producción que se ven en el rectángulo superior derecho, y de la sección II recibe los medios de consumo (los medios de vida necesarios), contenidos en el rectángulo situado abajo a la izquierda. De esa manera, cada una de estas secciones puede continuar la producción en la misma dimensión que se ha llevado a cabo hasta el momento actual: la sección I obtiene los medios de vida necesarios para la fuerza de trabajo que labora en la producción de éstos, y la sección II obtiene los medios de producción que le son necesarios para la renovación de los medios desgastados. Es evidente que este intercambio constituye una condición esencial para continuar el proceso productivo, es decir, la reproducción. Sin éste la sección II carecería de los medios de vida necesarios de la fuerza de trabajo, y en la sección II faltarían los medios de producción.

Presentamos este intercambio esquemáticamente, escribiendo

$$(11)\quad \overset{\text{I}}{\begin{bmatrix} Q_{1,r+1}\ Q_{1,r+2} \cdots Q_{1n}\ Q_{1a} \\ Q_{2,r+1}\ Q_{2,r+2} \cdots Q_{2n}\ Q_{2a} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_{r,r+1}\ Q_{r,r+2} \cdots Q_{rn}\ Q_{ra} \end{bmatrix}} \longleftrightarrow \overset{\text{II}}{\begin{bmatrix} Q_{r+1,1}\ Q_{r+1,2} \cdots Q_{r+1,r}\ Q_{r+1,a} \\ Q_{r+2,1}\ Q_{r+2,2} \cdots Q_{r+2,r}\ Q_{r+2,a} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_{n1}\quad Q_{n2}\quad \cdots Q_{nr}\quad Q_{na} \end{bmatrix}}$$

Este modelo representa la condición de equilibrio de *transferencias interseccionales (input-output)*. Si esta condición no se cumple, la producción no puede llevarse a cabo en la misma dimensión que hasta ahora, puesto que se presenta o bien la insuficiencia de los medios de producción en la sección II o bien la insuficiencia de los medios de vida necesarios en la sección I [13]. El modelo escrito en

[13] El signo $\longleftrightarrow$ designa aquí el intercambio. No es posible poner un signo de igualdad, puesto que los rectángulos contienen productos diferentes que se miden en unidades naturales distintas y aun el número de los productos que se encuentran en ambos rectángulos, como regla, es diferente. En el trabajo de Marx aparece el

la forma presentada aquí expresa la condición de equilibrio de transferencias interseccionales durante la reproducción en escala ampliada, si la última columna por los dos lados se compone de ceros (puede dejar de escribirse) el modelo expresa la condición de equilibrio de las transferencias durante la reproducción simple.

La condición de equilibrio de las transferencias interseccionales puede anotarse de un modo abreviado, de la siguiente manera: designando el contenido de los rectángulos (las matrices) en (10) por medio de $\mathbf{Q}_{I,II}$ y $\mathbf{Q}_{II,III}$, así como también designando los conjuntos de las magnitudes $\mathbf{Q}_{ij}$ que no se encuentran en los rectángulos por medio de $\mathbf{Q}_{I,I}$ y $\mathbf{Q}_{II,II}$, escribimos las ecuaciones (10) en forma de

(10a)

$$\text{sección I } \mathbf{P}_I = \mathbf{Q}_{I,I} + \boxed{\mathbf{Q}_{I,II}}$$

$$\text{sección II } \mathbf{P}_I = \boxed{\mathbf{Q}_{II,I}} + \mathbf{Q}_{II,II} + \mathbf{M}$$

$\mathbf{P}_I$ y $\mathbf{P}_{II}$ designan los conjuntos (vectores) de los productos que constituyen los medios de producción; $\mathbf{Q}_{I,II}$ los medios de producción transferidos por la sección I a la sección II; $\mathbf{Q}_{II,I}$ los medios de consumo (medios de vida necesarios) transferidos por la sección I a la sección II. Entre tanto, $\mathbf{Q}_{I,I}$ representa los medios de producción retenidos en la sección I para las necesidades propias, y $\mathbf{Q}_{I,II}$ representa los medios de consumo retenidos en la sección II. Finalmente, **M** representa los medios de consumo que no constituyen los medios de vida necesarios, que —como sabemos— no participan en el proceso de la reproducción. En consecuencia, en lugar de (11) obtenemos un apunte abreviado de las condiciones de equilibrio de las transferencias interseccionales, o sea [14]

(11a) $$\mathbf{Q}_{I,II} \longrightarrow \mathbf{Q}_{II,I}.$$

signo de igualdad por la razón de que todas las magnitudes se miden en unidades de valor. En vista de eso, todos los conjuntos de los diferentes productos (vectores y matrices) se transforman en magnitudes escalares, pueden sumarse sin restricciones y equipararse en cuanto a su magnitud; en el intercambio que existe entre la sección I y II también se intercambian valores. En cambio, nuestras reflexiones atañen exclusivamente a los productos en su forma efectiva, los cuales se miden en unidades naturales.

[14] El intercambio entre la sección I y la sección II, necesaria para el equilibrio del proceso reproductivo, abarca solamente $\mathbf{Q}_{I,II}$ y $\mathbf{Q}_{II,I}$; lo que sucede respecto a **M** es indiferente, porque esta magnitud no participa en el proceso de la reproducción. Esta puede ser consumida totalmente por las personas vinculadas a la sección II, puede ser totalmente transferida a las personas vinculadas a la sección I o bien puede ser dividida de una manera optativa entre ambos grupos. Esto no afec-

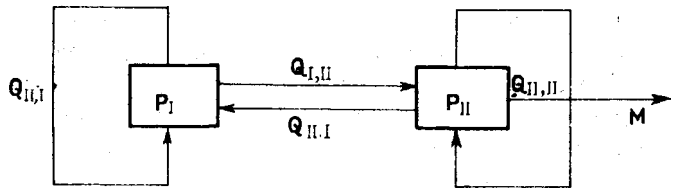


FIG. 12.
Esquema de bloque del proceso reproductivo.

Las transferencias interseccionales y seccionales internas que se realizan en el proceso reproductivo pueden ilustrarse con la ayuda de un diagrama de bloque.

En la figura 12 los bloques de la manera correspondiente representan la producción de los medios de producción y la producción de los medios de consumo (los vectores $\mathbf{P}_I$ y $\mathbf{P}_{II}$). Las flechas que van desde un bloque a otro indican las transferencias que se efectúan de una sección a la otra ($\mathbf{Q}_{I,II}$ y $\mathbf{Q}_{II,I}$), y en cambio, las flechas que regresan hacia el mismo bloque del que salen muestran los productos retenidos en la sección respectiva para las necesidades propias($\mathbf{Q}_{II,I}$ y $\mathbf{Q}_{II,II}$). La flecha que se encuentra del lado derecho, la

ta al ciclo del proceso reproductivo. Sucede sólo si —como lo hacemos actualmente— concebimos el proceso de reproducción en categorías materiales (naturales), es decir, como proceso de la *reproducción de los productos*. En principio, Marx investigó la reproducción como un proceso de *reproducción del valor*. Este proceso abarca como parte integrante el proceso de la reproducción de los productos (en la forma natural de éstos), pero que no se agota con eso. Según Marx, en la sección I se elaboran no sólo productos, sino también el valor y, dentro de éste, la plusvalía. Como resultado, la transferencia que se efectúa de la sección II a la sección I también abarca una parte M, o sea, la parte que corresponde a la plusvalía producida en la sección I que no está destinada a la acumulación (en las condiciones capitalistas la parte de la plusvalía consumida por los capitalistas de la sección I). En estas condiciones el esquema (10a) tiene la forma de

$$\text{la sección I } \mathbf{P}_I = \mathbf{Q}_{I,I} + \boxed{\mathbf{Q}_{I,II} + \mathbf{M}_{II,I}}$$

$$\text{la sección II } \mathbf{P}_{II} = \boxed{\mathbf{Q}_{II,I}} + \mathbf{Q}_{II,II} + \mathbf{M}_{II,II}.$$

Aquí $\mathbf{M}_{II,I}$ constituye la fracción de los medios de consumo que no son medios de vida necesarios, la cual es transferida por la sección II a la sección I, pero, en cambio, $\mathbf{M}_{II,II}$ constituye la parte de dichos medios de consumo que es retenida en la sección II.

El modelo (11a) toma entonces la forma

$$\mathbf{Q}_{I,II} + \mathbf{M}_{II,I} = \mathbf{Q}_{II,I}.$$

Esto corresponde a los modelos que aparecen en el trabajo de Marx.

que sale del segundo bloque y no regresa, representa los medios de consumo que no constituyen medios de vida necesarios (M). Como se ve, estos medios no toman parte en el proceso de la reproducción. La participación de las magnitudes restantes en el proceso reproductivo se hace evidente en que las flechas que salen del bloque regresan al bloque (al mismo o a otro).

El esquema de bloque (fig. 12) demuestra que el proceso de reproducción constituye un sistema de acciones acopladas [15], cuyos elementos activos son los procesos productivos correspondientes. Las acciones de los elementos respectivos son acopladas entre sí, y simultáneamente aparece una serie de *acoplamientos retroactivos.* Los acoplamientos retroactivos se presentan en cada una de las dos secciones como retención de una parte de los productos de una sección dada como gasto del proceso productivo propio [16]. Esto simbolizan las flechas que regresan al mismo bloque del que salen y que representan los llamados *nudos de acción cerrada* [17]. El acoplamiento retroactivo también se opera entre ambas secciones; éste consiste en el intercambio de los productos. Las flechas que unen los dos bloques tienen direcciones contrapuestas, así que conjuntamente también representan un nudo cerrado de acción. Los acoplamientos retroactivos descritos que se operan en el proceso reproductivo sugieren la idea de efectuar un análisis de ese proceso con la ayuda de los *métodos de la cibernética.* Este tipo de análisis se lleva a cabo en el anexo de este capítulo.

La división de los productos en medios de producción y medios de consumo se basa en la función económica que los productos cumplen; está indicada de un modo univalente por el carácter material (la forma natural) de los productos. En el caso de herramientas de trabajo especializadas, como instrumentos y máquinas, la forma material de éstos, los predestina realmente para que jueguen el papel de medios de producción, pues no sirven para ningún otro uso. La situación es diferente cuando se trata de los medios que en el proceso productivo cumplen el papel de medios auxiliares. Muchas instalaciones de este tipo pueden servir también como medios de consumo. Eso ocurre, ante todo, con los edificios que pueden servir tanto como taller de trabajo como de casa-habitación (o bien las dos cosas al mismo tiempo); las instalaciones de aire acondicionado, la ventilación, la iluminación pueden ser medios de produc-

[15] Ver antes cap. I.
[16] Este es *feed-back* en el sentido literal.
[17] Los llamados *closed loops* en la literatura sobre cibernética y automática.

ción cuando están instalados en una fábrica, o medios de consumo cuando están instalados en una vivienda (o bien ambos a la vez). Los medios de transporte (el caballo con la carreta o un automóvil) pueden servir tanto como medio de producción como medio de consumo. La mayor parte de los objetos de trabajo, especialmente las materias primas, también pueden usarse para el consumo; como, por ejemplo, el carbón que se usa para calentar la vivienda, la energía eléctrica que se usa en la casa para alumbrar y para otros fines de la economía doméstica, la gasolina para propulsar un automóvil de pasajeros, los diversos productos químicos (como, por ejemplo, la sosa y otros). Por otra parte, la mayoría de los productos que dentro de la clasificación cotidiana son considerados como artículos de consumo pueden ser utilizados como medios de producción, particularmente en la agricultura. Los cereales también sirven para la siembra; las patatas —como alimentación para el ganado porcino— y algunas veces aun el pan se usan para alimentar a los animales domésticos. Muchos productos que en principio cumplen la función de los llamados bienes de consumo dentro de la economía doméstica también pueden servir como medios de producción; por ejemplo, refrigeradores, aparatos de televisión, mesas, sillas, etc.

En un grado menor todavía, a la forma material de los productos está ligada la división de los medios de consumo —en medios de vida necesarios— y en medios que no cumplen esta función en el proceso de la reproducción. Sin duda alguna, pueden aislarse algunos medios de vida que por su carácter material, desde el punto de vista costumbrista, no constituyen medios de vida necesarios de la fuerza de trabajo; por ejemplo, medios de alimentación rebuscados, como el caviar, la ropa fina, el mobiliario lujoso de una vivienda —aunque aquí también la cosa puede presentarse de un modo distinto en diferentes condiciones geográficas (a causa de tener diferentes fuentes de alimentación) y culturales—. Generalmente, sin embargo, los productos que tienen la misma forma material (por ejemplo, el pan, la carne, la ropa, los automóviles, los libros) sirven tanto como los medios de vida necesarios, al igual que los medios de consumo puro (es decir, de consumo que no está vinculado a la renovación de la fuerza de trabajo). Esto depende de la cantidad en que los medios de consumo dados son consumidos, así como también de las personas que los consumen, o sea: si dichas personas están ocupadas en el proceso productivo o bien en las funciones imprescindibles para la renovación de la

fuerza de trabajo (por ejemplo, en la protección de la salud pública, en la enseñanza de las cualificaciones profesionales, etc.) o no. Aquí la división es exclusivamente funcional.

Evidentemente, el nexo que existe entre la función económica de los productos y su forma material es bastante flojo. Por esta razón, las condiciones de equilibrio de la reproducción, formuladas a manera de balances independientes —el balance de los medios de producción y el balance de los medios de consumo—, cuando existe una separación adicional de los medios de vida entre estos últimos de la fuerza de trabajo, no encuentran una expresión directa en el carácter material del proceso de producción. Tampoco encuentran un reflejo directo en la estadística económica, la cual clasifica los productos de acuerdo con su carácter material. Sin embargo, lo más importante de todo es que la división funcional no está ligada a las condiciones técnicas del proceso productivo, que dependen exclusivamente del carácter material de los productos y no de la función económica asignada a éstos. Para lograr una vinculación del proceso reproductivo a las condiciones técnicas de la producción es necesario examinar los productos dentro de su carácter material.

Con este fin estamos examinando la economía nacional, siendo que ésta se compone de diversas *ramas de producción*, cada una de las cuales elabora un producto (o productos) que tienen un carácter material determinado (una forma natural determinada); por ejemplo, el carbón, el acero, los diferentes tipos de maquinaria, los medios de transporte, artículos textiles, edificios, cereales, la carne, los diferentes productos químicos, el papel, etc. Digamos que el número de las ramas independientes es igual a *n:* mediante X_i designamos la cantidad del producto (en unidades naturales por una unidad de tiempo; por ejemplo, un año), elaborada en la rama *i*. Denominaremos esta cantidad como *producto global* de la rama dada. Una parte del producto global de la rama respectiva se utiliza como medio de producción para la renovación de los medios de producción desgastados durante un determinado período de tiempo (por ejemplo, un año). Esta puede ser parcialmente retenida en la rama en cuestión para satisfacer las necesidades propias (como, por ejemplo, los cereales para la siembra, el carbón como fuente de energía en las minas carboníferas), y parcialmente —y esto constituye una regla— es transferida a otras ramas que necesitan el producto dado como medio de producción (por ejemplo, el carbón transferido a los altos hornos, a las plantas electrotérmicas o

a los ferrocarriles). Por medio de X_{ij} designamos la cantidad del producto de la rama i transferida a la rama j (abarcando con eso también el caso en que $j = i$) para el uso de éste como medio de producción. Llamaremos a la magnitud X_{ij} *gastos reproductivos*. El resto del producto global que no se usa como gasto reproductivo se llama *producto final* de la rama dada; lo designaremos mediante Y_i. Como se ve, las magnitudes X_i, X_{ij}, así como también Y_i, constituyen flujos.

Llevando a cabo una división de este tipo para todas las ramas de la producción, obtenemos como resultado la tabla *de gastos por ramas y resultados de la producción* (tabla 11).

TABLA 11

BALANCE DE TRANSFERENCIAS INTERRAMALES (EN UNIDADES NATURALES)

Gastos reproductivos	Productos finales	Productos globales
$X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n}$	Y_1	X_1
$X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n}$	Y_2	X_2
. . . . .	. . .	. . .
$X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nn}$	Y_n	X_n

La parte cuadrada de la tabla muestra las cantidades de los productos transferidos por cada rama de la producción a otras ramas para los fines de la reproducción, así como también la cantidad de los productos retenidos con el mismo objeto dentro de las ramas correspondientes (las magnitudes $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{nn}$, que se encuentran en la diagonal de la tabla). Esta parte de la tabla se denomina comúnmente *matriz de transferencias interramales*, y toda la tabla se denomina *balance de transferencias interramales* [18].

[18] Los balances de transferencias interramales se originaron en la Unión Soviética y posteriormente en otros países socialistas en relación a la planificación de la economía nacional. En un principio éstas fueron aplicadas a las materias primas y otros materiales, en forma de balances de materiales. En el curso de los trabajos preparatorios del primer plan quinquenal en la URSS (para los años 1928-1932) surgió la idea de efectuar balances más amplios de gastos y resultados de la producción. La teoría general de este tipo de balances, y sobre todo la concepción matemática de éstos, fue creada por el economista norteamericano Vassily Leontief, que la presentó en el año 1941 en el libro *The Structure of American Economy 1919-1930*, Nueva York. Ya anteriormente había publicado un artículo sobre ese tema en la revista *Review of Economic Statistics* en el año 1937. Es conveniente recordar que el primer

Los productos de las ramas respectivas se determinan de acuerdo con su forma material; en principio éstos pueden servir tanto de medios de producción como de medios de consumo. Si el producto de la rama i no se usa en la rama j como medio de producción, entonces $X_{ij} = 0$; si el producto no es usado en absoluto como medio de producción, es decir, sirve exclusivamente para el consumo, entonces todo el verso correspondiente en la matriz de transferencias interramales se compone de ceros; siendo así, todo el producto global constituye el producto final. Los productos finales Y_n pueden ser usados ya sea para el consumo o para la producción, o para ambos fines. Si el producto final o una parte de éste se usa para la producción, se realiza la acumulación de los medios de producción, puesto que las necesidades de la renovación de los medios de producción ya están satisfechas con la ayuda de los gastos reproductivos X_{ij}. En el caso de que un producto dado sirva exclusivamente como medio de producción, todo el producto final constituye acumulación de los medios de producción.

Como se ve, la tabla 11 abarca también los casos en que los productos cumplen exclusivamente la función económica de los medios de producción, o bien de los medios de consumo, pero no

artículo que contenía el pensamiento fundamental del balance de transferencias interramales fue publicado por Leontief en el año de 1925, en la revista soviética *Planovoye joziaystvo* (Economía planificada), núm. 12, bajo el título *Balans Narodnogo Joziaysva SSSR* (Balance de la Economía Nacional de la URSS). Leontief vivía entonces en la Unión Soviética; sin embargo, sólo desarrolló su teoría en los Estados Unidos. El método de los balances de transferencias interramales fue denominado por Leontief como *input-output analysis*. Este término, tal como suena en inglés, tuvo amplia aceptación en muchos países. Posteriormente, también se comenzó a usar el término «análisis de transferencias interramales», «balance interramal», etc. Actualmente este método está muy difundido tanto en los países capitalistas como socialistas; en estos últimos se vincula cada vez más estrechamente a la práctica de la planificación de la economía nacional. Sobre el tema del fondo histórico del que surgió el método de balances de afluencias interramales, la difusión de éste y su significación en diversas condiciones sociales y de las formaciones sociopolíticas ver O. LANGE, *Economia Política*, t. I, ed. cit., pp. 274-279. Una introducción a la teoría de balances interramales está presentada por O. LANGE en la obra *Wstep do ekonometrii* (Introducción a la econometría), Varsovia, 1965, cap. III; O. LANGE, *Teoria reprodukcji i akumulacji*, ed. cit., cap. III [traducción castellana citada]; P. SULMICKI, *Przeplywy miedzygaleziowe* (Transferencias interramales) Varsovia, 1959. Ver también R. DORFMAN, P. A. SAMUELSON, R. M. SOLOW, *Linear Programming and Economic Analysis*, Nueva York, 1959, caps. 9 y 10; W. B. CHENERY y P. S. CLARK, *Interindustry Economics*, Nueva York, 1958; I. YAMADA, *Theory and Application of Interindustry Analysis*, Tokio, 1961; W. NIEMCHYNOV, *Ekonomiko-matematicheskiye metody i modeli*, ed. cit., cap. VIII; así como también T. CZECHOWSKI, *Wstep matematyczny do analizy przeplywów miedzygaleziowych* (Introducción matemática al análisis de transferencias interramales), Varsovia, 1958.

se limita sólo a estos casos. Dividiendo los productos globales que pueden servir como medios de producción y como medios de consumo, en la fracción que constituye los medios de producción y la fracción que constituye los medios de consumo, es posible transformar la tabla 11 en la parte superior de la tabla 9 (es decir, la parte de la tabla que no contiene gastos de trabajo). Pasamos entonces a la clasificación de los productos de acuerdo a la función económica que éstos cumplen.

Las columnas de la matriz de transferencias interramales representan gastos de los medios de producción respectivos durante la elaboración de un producto dado. No se puede, sin embargo, sumar los términos que se encuentran en las columnas de la tabla 11 porque éstos representan magnitudes expresadas en unidades naturales diferentes. En cambio, es posible sumar los términos que se encuentran en los renglones correspondientes (hasta la línea vertical doble); en suma, éstos dan productos finales de las ramas respectivas (presentados a la derecha de la línea vertical doble). Efectuando una suma de este tipo, se obtiene la ecuación

$$
\begin{aligned}
X_1 &= X_{11} + X_{12} + \ldots + X_{1n} + Y_1, \\
X_2 &= X_{21} + X_{22} + \ldots + X_{2n} + Y_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
X_n &= X_{n1} + X_{n2} + \ldots + X_{nn} + Y_n.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Denominamos a dichas ecuaciones *balance productivo en el sistema ramal*. En el sistema ramal éstas expresan las condiciones de equilibrio del proceso de la reproducción.

La ecuación (12) también puede escribirse en forma vectorial. Por medio de **X** designamos el vector (es decir, el conjunto) de los productos globales; por medio de **Y**, el vector de los productos finales, y por medio de $\mathbf{X}_{ij}$, el vector de gastos reproductivos [19].

Estos vectores *representan el producto social global*, el *producto so-*

[19] Estos vectores tienen forma de

$$
\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_{ij} = \begin{bmatrix} X_{11} + X_{12} + \ldots + X_{1n} \\ X_{21} + X_{22} + \ldots + X_{2n} \\ \vdots \\ X_{n1} + X_{n2} + \ldots + X_{nn} \end{bmatrix}
$$

cial final, el *gasto reproductivo social*, todo dentro del sistema ramal. Escribimos las ecuaciones (12) en forma de una ecuación

$$\text{(12a)} \qquad \mathbf{X} = \mathbf{X}_{ij} + \mathbf{Y}.$$

El proceso reproductivo que expresa la ecuación (12a) puede representarse por medio de un diagrama de bloque (fig. 13). El bloque representa el producto social global; este producto se ramifica en dos partes:

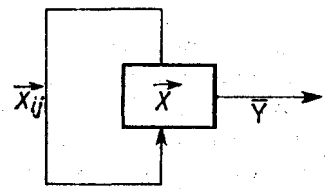


FIG. 13.
Esquema de bloque de la reproducción, dentro del sistema ramal.

una de éstas constituye el producto social final que ya no regresa al bloque [20], y la otra constituye el gasto reproductivo social que nuevamente regresa al bloque. Como se ve, en el proceso reproductivo tiene lugar un acoplamiento retroactivo (nudo cerrado de acción); éste se manifiesta a través del hecho de que una parte del producto social global retorna otra vez al proceso productivo como gasto reproductivo. Por consiguiente, este proceso puede ser presentado por medio de un análisis cibernético.

[20] Establecemos la premisa de que aquí existe la reproducción simple. Durante la reproducción a escala ampliada una parte del producto social final Y se asigna para la acumulación de los medios de producción y regresa otra vez al bloque. Examinaremos este asunto en el capítulo siguiente.

ANEXOS

INTRODUCCION AL LIBRO *CZLOWIEK I TECHNIKA W PRODUKCJI* (EL HOMBRE Y LA TECNICA EN LA PRODUCCION) *

La producción es la base de toda la actividad económica de los hombres. En la producción los hombres elaboran bienes materiales que posteriormente se convierten en objeto de distribución y consumo. Los productos de la producción se vuelven objetivo de una compleja red de relaciones interpersonales que constituyen la economía de la sociedad contemporánea. En la producción se presentan determinadas regularidades que tienen que tomarse en cuenta cuando se dirige y maneja los procesos económicos de la sociedad. Estas regularidades son de dos tipos. Unas tienen el carácter de relaciones materiales que existen entre los productos respectivos, otras son resultado del cálculo de valor, aplicado en los procesos económicos.

Las primeras dimanan de las propiedades técnicas del proceso productivo como un proceso en el cual el hombre transforma la naturaleza, adaptándola a sus necesidades y a sus fines. Así, por ejemplo, para producir una determinada cantidad de acero se necesita (en condiciones técnicas dadas) una determinada cantidad de mineral de hierro, de carbón, de energía eléctrica, de diversos tipos de trabajo cualificado y no cualificado. Esto hace imprescindibles las correspondientes proporciones durante la elaboración de diversos productos y hace necesario un desarrollo de diversas cualificaciones de los trabajadores. Los medios de producción se desgastan (de una sola vez o gradualmente); se presenta, por lo tanto, la necesidad de renovarlos para asegurar una continuación constante del proceso productivo. Los diversos procesos técnicos que se aplican en la producción se distinguen por su gran rendimiento; entre éstos varía la relación que existe entre los gastos de los medios y los resultados en la forma del producto obtenido. Todas las relaciones materiales de este tipo tienen que tomarse en consideración al dirigir el proceso productivo.

* Editado en la serie «Omega» PWN, Varsovia, 1965.

Las segundas provienen de las relaciones sociales que se entablan entre las personas durante el proceso productivo. En la economía mercantil estas relaciones se manifiestan como el valor de los productos y se convierten en la base de las correspondientes valorizaciones de los aspectos particulares del proceso productivo. Con más frecuencia estas valorizaciones toman forma de cálculo monetario.

Las relaciones materiales y las relaciones de valor se presentan en la producción, tanto en la economía socialista como en la capitalista.

En la economía capitalista las relaciones materiales que se establecen en el proceso productivo están totalmente disimuladas por las relaciones de valor. La plusvalía obtenida por los capitalistas constituye un objetivo de la producción capitalista; respecto a las cantidades de productos elaborados y sobre los procesos técnicos aplicados, decide el cálculo monetario y valoritario —el cálculo del lucro y de los costos—. Este cálculo depende, a su vez, del transcurso de los procesos de mercado que determinan la rentabilidad de las decisiones particulares emprendidas durante el proceso productivo. Las relaciones materiales que existen en el proceso productivo no se observan de una manera directa. Sin embargo, éstas llaman la atención cuando sus necesidades son desoídas. Y esto sucede frecuentemente, puesto que el mecanismo de la economía capitalista conduce a contradicciones que se presentan en los resultados del cálculo monetario y valoritario en cuanto a la rentabilidad de las empresas y a las necesidades reales del proceso productivo en la economía social. Estas contradicciones se manifiestan en forma de crisis y otras perturbaciones. Las necesidades reales del proceso productivo se hacen evidentes sólo cuando se presentan las perturbaciones.

En el socialismo, en cambio, las necesidades reales se presentan de una manera directa. Los planes de la economía nacional determinan en forma efectiva las tareas de producción de las ramas respectivas de la economía nacional, efectúan el balance de la elaboración de los productos correspondientes y tienden a asegurar las proporciones compatibles con las necesidades reales del proceso productivo. El cálculo monetario-valoritario desempeña un papel auxiliar en la economía socialista. Este constituye un instrumento para medir el rendimiento social de la actividad productiva, así como también es la base para movilizar los estímulos económicos, indispensables para un funcionamiento eficaz de la economía. De

esa manera, la investigación de las relaciones reales que existen en el proceso productivo en el socialismo cobran una significación primordial, se vinculan directamente con la práctica de la planificación económica.

Este librito está dedicado a los aspectos fundamentales del proceso productivo. Se compone de tres capítulos. El primer capítulo trata del doble carácter de la producción: como un proceso que existe entre el hombre y la naturaleza, por una parte, y de la cooperación de los hombres, por otra parte. El segundo capítulo se refiere a las relaciones cuantitativas que se presentan en la producción. Finalmente, el tercer capítulo se ocupa del problema de la renovación de los medios de producción. Dichos capítulos constituyen fragmentos del segundo tomo de mi libro *Ekonomia polityczna* (Economía política), que se encuentra en preparación. Los primeros dos capítulos aparecieron impresos en el *Ekonomista* (núm. 1/1962 y núm. 4/1964). Como la preparación, y posteriormente la impresión, del tomo II de mi *Economía Política* requieren un largo tiempo todavía, entrego en las manos del lector estos fragmentos en su forma actual.

APÉNDICE AL CAPÍTULO IV

CONDICIONES DE EQUILIBRIO DE LA REPRODUCCION

ESQUEMAS CIBERNÉTICOS DE LA TEORÍA DE LA REPRODUCCIÓN *

§ 1. *Esquema de la reproducción simple*

En este capítulo nos ocuparemos del análisis cibernético y de la interpretación marxista de los esquemas de la reproducción. Inicialmente examinaremos el problema conjuntamente para toda la economía nacional; posteriormente consideraremos la división de la economía en dos secciones, y finalmente analizaremos el problema en su forma general, planteando la premisa de que la economía nacional se divide en n ramas.

El producto global X, expresado en unidades de valor, puede determinarse como una suma compuesta de tres elementos:

$$X = c + (v + m). \tag{2.1}$$

El primer elemento c designa la magnitud de gastos de los medios de producción necesarios para elaborar el producto X, en tanto que la suma $(v + m)$ es el gasto de trabajo vivo [1].

En nuestras reflexiones estamos introduciendo los llamados *coeficientes de gastos* de los medios de producción y de trabajo vivo, determinados de una manera correspondiente, por medio de los modelos:

$$a_c = \frac{c}{X} \quad \text{así como también} \quad a_{v+m} = \frac{v+m}{X} \tag{2.2}$$

$$\text{(en tanto que } a_c + a_{v+m} = 1\text{)}.$$

* Fragmentos del capítulo II del trabajo de O. LANGE, *Wstep do cybernetyki ekonomicznej*, Varsovia, 1965, pp. 53-63 (la numeración de las fórmulas se presenta como en el libro citado). [Existe traducción en castellano: *Introducción a la economía cibernética*, Ed. Siglo XXI, Madrid, 1969.]

[1] La división de gastos del trabajo vivo en dos componentes v y m es aquí intranscendental.

Entonces el modelo (2.1) se puede presentar en la siguiente forma:

$$X = a_c X + (v + m)$$

o bien

$$(1 - a_c) X = v + m.$$

de ahí

$$X = \frac{1}{1 - a_c} (v + m). \tag{2.3}$$

De la forma del modelo (2.3), el cual representa el proceso de la creación del valor, se ve que en este proceso se presenta un cierto acoplamiento retroactivo. Realmente, el proceso de la creación del valor se puede representar con la ayuda de un esquema cibernético de bloque, presentado más abajo (fig. 14).

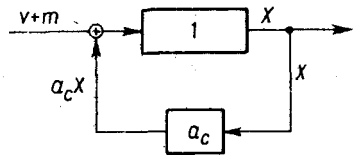


FIG. 14.

De la figura 14 resulta que el trabajo vivo $v + m$ se transforma en el producto X, y siendo así, ésta es una transformación de identicidad designada mediante el símbolo 1. Al sistema regulado está incluida una especie de regulador que tiene operador de proporcionalidad a_c, cuya existencia surge a causa de que una parte del producto X tiene que ser asignada para la recreación de los medios de producción desgastados. Precisamente la transformación efectuada en dicho sistema de regulación está determinada por medio del modelo (2.3).

A su vez, supongamos que la economía nacional está dividida en dos secciones: en la sección I, que produce medios de producción, y en la sección II, que produce medios de consumo. Los modelos que determinan los productos globales de las secciones particulares de la economía nacional los escribimos en forma de:

$$\begin{cases} X_1 = c_1 + (v_1 + m_1) = a_{1c} X_1 + (v_1 + m_1), \\ X_2 = c_2 + (v_2 + m_2) = c_2 + a_{2(v+m)} X_2. \end{cases} \tag{2.4}$$

En los modelos (2.4) a_{1c} representan el coeficiente de gastos de los medios de producción en la sección I y $a_{2(v+m)}$ el coeficiente de

gastos de trabajo vivo en la sección II. Conocemos la condición de equilibrio del proceso de la reproducción simple:

$$c_2 = v_1 + m_1 . \tag{2.5}$$

Esta condición significa que el valor de los medios de producción que la sección II adquiere en la sección I, es decir, $v_1 + m_1$, tiene que ser igual al valor de los medios de consumo [2], transferidos de la sección II a la sección I, o sea, c_2.

De las ecuaciones (2.4) obtenemos los modelos transformados para la magnitud global de la producción de los medios de producción, así como también de la producción global de los medios de consumo:

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{1}{1 - a_{1c}} (v_1 + m_1), \\ X_2 = \dfrac{1}{1 - a_{2(v+m)}} c_2 , \end{cases} \tag{2.6}$$

que corresponden a las trasnformaciones presentadas en forma de esquemas de bloque para la sección I en la figura 15 y para la sección II en la figura 16.

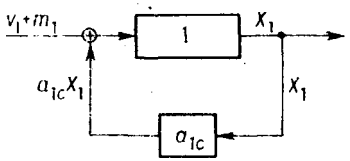


FIG. 15

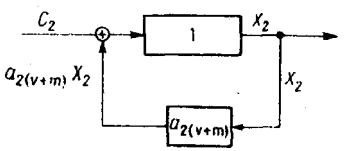


FIG. 16

En base a los modelos (2.6) calculamos la relación del valor de los productos globales en ambas secciones. Considerando la condición de equilibrio (2.5) y tomando en cuenta que

$$a_{2c} + a_{2(v+m)} = \frac{c_2}{X_2} + \frac{v_2 + m_2}{X_2} = 1,$$

obtenemos

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{1 - a_{2(v+m)}}{1 - a_{1c}} = \frac{a_{2c}}{1 - a_{1c}} .$$

[2] Las reflexiones detalladas sobre este tema se pueden encontrar en el libro de O. LANGE, *Teoria reproducji i akumulacji*, ed. cit., pp. 35 y ss.; [en traducción castellana citada, pp. 37 ss.]

de ahí

$$X_1 = \frac{a_{2c}}{1 - a_{1c}} \cdot X_2. \tag{2.7}$$

La transformación (2.7) también se puede expresar en forma de un esquema de bloque, presentado en la figura 17. A este tema se le puede dar la siguiente interpretación económica.

Supongamos que estamos intentando producir X_2 medios de producción y preguntamos qué cantidad de éstos es necesaria para que el proceso de la reproducción simple sea equilibrado, es decir, para que pueda realizarse el plan establecido. Para producir X_2 medios de consumo son indispensables $c_2 = a_{2c}X_2$ medios de producción, donde a_{2c} es el coeficiente de gastos de los medios en la sección II. Esta transformación se lleva a cabo dentro de un sistema que tiene el operador a_{2c}. No obstante, para producir $c_2 = a_{2c}X_2$ medios de producción otra vez es necesaria cierta cantidad de medios de producción; o sea, dentro del sistema examinado tiene que ser agregado en serie, mediante el acoplamiento retroactivo, un sistema de regulación (el regulador) cuyo operador —como dimana del modelo (2.7)— es igual a $a_{1c} = \frac{c_1}{X_1}$; es decir, es igual al coeficiente de gastos de los medios de producción en la sección I.

De un modo análogo, como antes, es posible obtener la relación que existe entre la magnitud del producto global de la sección II y la magnitud del producto global de la sección I:

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{a_{1(v+m)}}{1 - a_{2(v+m)}},$$

y de ahí

$$X_2 = \frac{a_{1(v+m)}}{1 - a_{2(v+m)}} - X_1. \tag{2.8}$$

El esquema de bloque que corresponde a la tranformación (2.8) está representado en la figura 18.

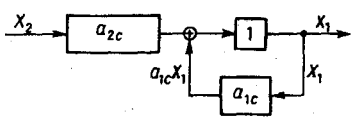


FIG. 17.

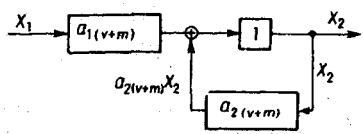


FIG. 18.

El modelo (2.8) y el esquema de bloque, presentados en la figura 18, tienen la siguiente interpretación económica. Supongamos que planificamos la elaboración de X_1 medios de producción y queremos establecer cuántos medios de consumo son imprescindibles para realizar este plan. Para producir X_1 medios de producción es indispensable poseer un consumo en la cantidad de $v_1 + m_1 = a_{1(v+m)}X_1$. Pero, subsecuentemente, para producir dichos medios de consumo es necesaria una cantidad adicional de medios de consumo. En relación a eso, en el sistema regulador aparece el sistema de regulación acoplado retroactivamente que tiene un operador igual a $a_{2(v+m)} = \dfrac{v_2 + m_2}{X_2}$, es decir, igual al coeficiente de gastos del trabajo vivo en la sección II.

§ 2. *Esquema de la reproducción en escala ampliada*

Ahora nos ocuparemos del análisis cibernético de los esquemas de la reproducción en escala ampliada, dando por supuesto, de una manera similar a la empleada en el párrafo anterior, que la economía nacional se divide en dos secciones.

Los esquemas de Marx, en el caso de la reproducción ampliada, pueden escribirse de la manera siguiente:

$$\text{(2.9)} \qquad \begin{cases} c_1 + v_1 + m_{1c} + m_{1v} + m_{10} = X_1, \\ c_2 + v_2 + m_{2c} + m_{2v} + m_{20} = X_2. \end{cases}$$

En el primero de estos modelos m_{1c} y m_{1v} designan las partes del valor del plusproducto [3] de la sección I, asignado para el incremento de la reserva de los medios de producción, así como también para la ocupación de la fuerza adicional de trabajo en la producción, en tanto que m_{10} representa la parte del valor del producto excedente de la sección I, que es consumida de una manera no productiva. Las magnitudes m_{2c}, m_{2v} y m_{20} tienen un significado análogo. Las demás magnitudes en los modelos (2.9) tienen el mismo sentido que en el párrafo anterior.

[3] Aquí el uso del término «el valor del producto excedente» permite la interpretación de los modelos (2.9) y ulteriores, tanto en el caso de la economía socialista como capitalista.

Es conveniente efectuar una agrupación de elementos que se encuentran del lado izquierdo con los modelos (2.9) en el siguiente orden:

$$(2.9a)\qquad \begin{cases} c_1 + m_{1c} + \boxed{v_1 + m_{1v} + m_{10}} = X_1, \\ \boxed{c_2 + m_{2c}} + v_2 + m_{2v} + m_{20} = X_2. \end{cases}$$

En el primero de estos modelos la suma $c_1 + m_{1c}$ designa una demanda total para los medios de producción de la sección I, y la suma $v_1 + m_{1v} + m_{10}$ representa la demanda total para los medios de consumo de la sección I. De la forma de los modelos (2.9a) se ve también la consabida condición de equilibrio en el caso de la reproducción en escala ampliada:

$$(2.10)\qquad c_2 + m_{2c} = v_1 + m_{1v} + m_{10},$$

que significa que la demanda de la sección II para los medios de producción $c_2 + m_{2c}$ es igual a la demanda de la sección I para los medios de consumo, necesarios para los trabajadores ya ocupados y para la ampliación de ocupación de éstos $v_1 + m_{1v}$, así como también para consumo improductivo m_{10} de una parte del valor del producto excedente.

Introduciendo el coeficiente de gastos de los medios de producción en la sección I: $a_{1c} = \dfrac{c_1}{X_1}$, el coeficiente de acumulación de los medios de producción en la sección I: $\alpha_{1c} = \dfrac{m_{1c}}{X_1}$, el coeficiente de gasto anual de trabajo vivo en la sección II: $a_{2v} = \dfrac{v_2}{X_2}$, el coeficiente de acumulación del capital variable (o sea, de los medios de consumo destinados para la ampliación de la ocupación) en la sección II: $\alpha_{2v} = \dfrac{m_{2v}}{X_2}$, así como también la cuota de consumo improductivo del valor del producto excedente en la sección II: $\alpha_{20} = \dfrac{m_{20}}{X_2}$, los modelos (2.9a) se pueden presentar de una manera diferente:

$$(2.9b)\qquad \begin{cases} a_{1c}X_1 + \alpha_{1c}X_1 + v_1 + m_{1v} + m_{10} = X_1, \\ c_2 + m_{2c} + a_{2v}X_2 + \alpha_{2v}X_2 + \alpha_{20}X_2 = X_2. \end{cases}$$

De ahí obtenemos

$$(2.11)\qquad \begin{cases} X_1 = \dfrac{1}{1-(a_{1c}+\alpha_{1c})}(v_1 + m_{1v} + m_{10}), \\ X_2 = \dfrac{1}{1-(a_{2v}+\alpha_{2v}+\alpha_{20})}(c_2 + m_{2c}). \end{cases}$$

Con base en los modelos (2.11) el proceso de la creación del valor de los productos en la sección I y en la sección II se puede ilustrar por medio de esquemas de bloque, representados de la manera correspondiente en las figuras 19 y 20.

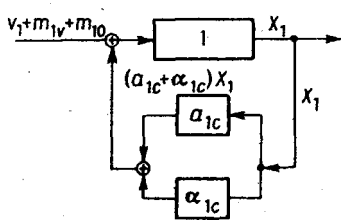


FIG. 19.

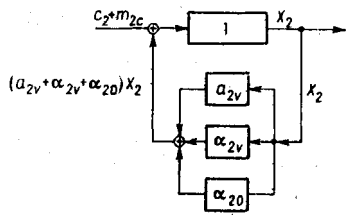


FIG. 20.

Como resulta de la figura 19, la suma $v_1 + m_{1v} + m_{10}$ se transforma de una manera idéntica en producto de la sección I. Una parte de este producto es retenida en la sección respectiva y, como dimana del primer modelo (2.11), se realiza aquí una transformación que corresponde al acoplamiento retroactivo de dos sistemas reguladores incluidos paralelamente que tienen los operadores de proporcionalidad igualada: a_{1c}, y α_{1c}

De la misma manera puede explicarse el funcionamiento del sistema de regulación presentado en la figura 20, donde aparecen tres sistemas reguladores conectados paralelamente, cuyos operadores son: a_{2v}, α_{2v}, α_{20}.

Con base en los modelos (2.11) es posible calcular la relación que existe entre la magnitud del producto global de la sección I y la magnitud del producto global de la sección II. Considerando la condición (2.10) de equilibrio del proceso de la reproducción en escala ampliada, y teniendo en cuenta que

$$1 - (a_{2v} + \alpha_{2v} + \alpha_{20}) = a_{2c} + \alpha_{2c},$$

obtenemos

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{a_{2c} + \alpha_{2c}}{1-(a_{1c}+\alpha_{1c})}.$$

de ahí

$$X_1 = \frac{a_{2c} + \alpha_{2c}}{1 - (a_{1c} + \alpha_{1c})} X_2 . \tag{2.12}$$

La transformación determinada por medio del modelo (2.12) está presentada en el esquema de bloque en la figura 21. Observemos que en este esquema el sistema regulador que tiene el operador $a_{2c} + \alpha_{2c}$ se puede reemplazar por dos sistemas acopla-

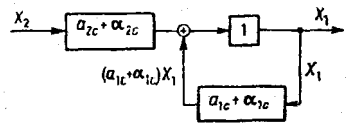


FIG. 21.

dos paralelamente que tienen los operadores iguales, a_{2c} y α_{2c}, correspondientemente. De una manera similar, el regulador que tiene el operador $a_{1c} + \alpha_{1c}$ se puede sustituir por dos reguladores acoplados paralelamente que tienen operadores iguales correspondientemente: a_{1c} y α_{1c}.

De un modo análogo, no es difícil calcular que

$$X_2 = \frac{a_{1v} + \alpha_{1v} + \alpha_{10}}{1 - (a_{2v} + \alpha_{2v} + \alpha_{20})} X_1 , \tag{2.13}$$

y presentar esta transformación en el correspondiente esquema de bloque. La interpretación económica de los modelos (2.12) y (2.13), así como también los esquemas de bloque que corresponden a éstos, sería semejante a la interpretación de los modelos (2.7) y (2.8) en el párrafo anterior.

Observemos finalmente que los modelos (2.7) y (2.8), que corresponden a la reproducción simple, constituyen el caso particular de los modelos (2.12) y (2.13) de la reproducción en escala ampliada. Para convencernos de esto es suficiente en los modelos (2.12) y (2.13) aceptar que los coeficientes de acumulación son iguales a cero.

De ese modo hemos demostrado que los esquemas de la reproducción simple y de la reproducción ampliada pueden explicarse con la ayuda del modelo básico de la teoría de Keynes sobre la creación del ingreso nacional en el sentido de una suma de pagos dentro de la economía nacional; así como también los esquemas de la

reproducción de Marx pueden ser interpretados y analizados en base a una teoría general sobre la regulación.

§ 3. *Esquema multirramal de la reproducción*

Ahora nos ocuparemos del análisis cibernético del proceso reproductivo en el caso en que la economía nacional esté dividida en n ramas. La tabla de gastos y resultados de la producción que corresponde a dicha situación, llamada también tabla de *transferencias interramales,* está presentada más abajo.

X_1	$c_{11}\ c_{12}\ \ldots\ c_{1n}$	Y_1
X_2	$c_{21}\ c_{22}\ \ldots\ c_{2n}$	Y_2
...	.....	...
X_n	$c_{n1}\ c_{n2}\ \ldots\ c_{nn}$	Y_n
V	$v_1\ v_2\ \ldots\ v_n$	
M	$m_1\ m_2\ \ldots\ m_n$	
	$X_1\ X_2\ \ldots\ X_n$	

En esta tabla $X_1, X_2, \ldots, X_n$ representan valores de los productos globales en las ramas respectivas; $c_{ij}\,(i,j = 1, 2, \ldots, n)$ designan los valores de las transferencias interramales de los medios de producción de la rama i a la rama j; $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ son los productos globales de las ramas correspondientes; $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son los gastos de la fuerza de trabajo; $m_1, m_2, \ldots, m_n$ son los valores del producto de la economía nacional.

En base a la tabla de transferencias interramales es fácil sacar (sumando los renglones de esta tabla) las siguientes ecuaciones de *balance de gastos de la producción:*

$$(2.14)\quad X_i = c_{i1} + c_{i2} + \ldots + c_{in} + Y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

y (sumando las columnas de la tabla), las *ecuaciones del balance a los gastos de producción:*

$$(2.15)\quad X_i = c_{1i} + c_{2i} + \ldots + c_{ni} + v_i + m_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En esta última ecuación, designando la suma $c_{1i} + c_{2i} + \ldots + c_{ni}$ por medio de c_i, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$(2.15a) \qquad X_i = c_i + v_i + m_i \quad (i = 1, 2; \ldots, n),$$

o sea, igualdades del mismo tipo que se encuentran en el esquema de Marx.

Comparando los lados derechos de las ecuaciones (2.14) y (2.15), obtenemos las llamadas *ecuaciones de equilibrio de transferencias interramales,* que constituyen la correspondencia de las ecuaciones de equilibrio del proceso de la reproducción que cita Marx [4].

Introduciendo, para una simplificación ulterior de las reflexiones, los llamados *coeficientes de gastos de los medios de producción* determinados mediante los modelos $a_{ij} = \frac{c_{ij}}{X_i}$ $(i,j = 1, 2, \ldots, n)$ de la ecuación de balance de gastos de la producción, se puede apuntar de la siguiente manera:

$$(2.16) \quad X_i = a_{1i}X_i + a_{2i}X_i + \ldots + a_{ni}X_i + v_i + m_i \; (i = 1, 2, \ldots, n).$$

De ahí obtenemos

$$(2.17) \quad X_i = \frac{1}{1 - (a_{1i} + a_{2i} + \ldots + a_{ni})} (v_i + m_i) \; (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Si designáramos la suma $a_{1i} + a_{2i} + \ldots + a_{ni}$ mediante a_i, entonces los modelos (2.17) se transformarían en modelos:

$$(2.18) \qquad X_i = \frac{1}{1 - a_i} (v_i + m_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

que tienen la forma análoga al modelo (2.6) que corresponde a la transformación obtenida sobre la base del esquema de la reproducción simple de Marx.

Las transformaciones determinadas por medio de los modelos (2.17) se pueden presentar en forma de un esquema de bloque

[4] El desarrollo detallado de la teoría de transferencias interramales (de los esquemas multirramales de la teoría de la reproducción) puede encontrarse en los libros de O. LANGE, *Wstęp do ekonometrii,* ed. cit., pp. 192 y ss.; [traducción castellana en F. C. E., México], o bien: *Teoria reprodukcji i akumulacji,* ed. cit., pp. 60 y ss.; [traducción castellana citada, pp. 70 y ss.].

ilustrado en la figura 22. Al trazar este esquema de bloque utilizamos el teorema sobre la suma de operadores que pueden interpretarse como acoplamiento paralelo de sistemas elementales (§ 6, cap. I).

Ocupémonos ahora de las ecuaciones de balance de la distribución de los productos que después de haber introducido a éstos los coeficientes de gastos adoptan la forma de

$$(2.19)\quad X_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \ldots + a_{ii}X_i + \ldots + a_{in}X_n + Y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

o bien

$$X_i(1 - a_{ii}) = \sum_{j \neq i} a_{ij}X_j + Y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

de ahí

$$(2.20)\quad X_i = \frac{1}{1 - a_{ii}}\left(\sum_{j \neq i} a_{ij}X_j + Y_i\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

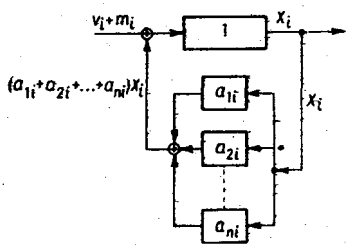


FIG. 22.

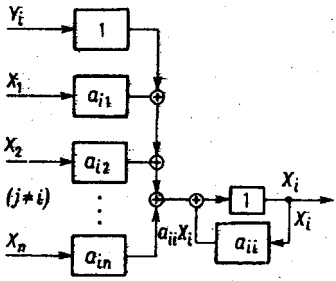


FIG. 23.

El esquema de bloque que corresponde a las ecuaciones (2.20) está representado en la figura 23.

LA DINÁMICA DE LOS PROCESOS DE REGULACIÓN *

§ 5. *Dinámica del proceso de la reproducción según Marx*

Como el segundo ejemplo del análisis del proceso dinámico, examinaremos de un modo similar el desarrollo de la economía de acuerdo con el esquema presentado por Marx. En este caso parti-

* Un fragmento del cap. III de la obra de O. LANGE *Introducción a la economía cibernética*, ed. cit., pp. 78-81.

mos de una conocida ecuación que corresponde a ese proceso y que se encuentra en el esquema marxista de la reproducción (§ 1, capítulo II):

$$x = a_c x + (v + m), \tag{3.22}$$

donde a_c es el coeficiente de gastos de los medios de producción. También podemos apuntar esta ecuación de la manera siguiente:

$$x = \frac{1}{1 - a_c}(v + m). \tag{3.22a}$$

Las magnitudes x, v y m están expresadas en unidades de valor o en precios.

Al investigar la dinámica del proceso reproductivo tenemos que introducir el factor tiempo a la ecuación investigada (3.22); o sea, tenemos que «fechar» las magnitudes correspondientes. Con ese fin introducimos el índice t, que designa el período correspondiente, el cual, para simplificar, llamaremos un año. Daremos por supuesto que el gasto de los medios de producción durante el año en cuestión $a_c x_{t-1}$ es proporcional a la producción del año precedente. Siendo así, la ecuación toma la forma de

$$x_t = a_c x_{t-1} + (v_t + m_t). \tag{3.23}$$

Esto significa que la producción del año $t - 1$ determina la cantidad de los medios de producción que se estaban desgastando durante el año t. En otras palabras, la cantidad de los medios de producción que se desgastaban durante el año respectivo (es decir, el valor de los medios de producción transmitido al producto) constituye una determinada fracción constante de la producción del año anterior ($0 < a_c < 1$).

La ecuación diferencial (3.23) la resolveremos —como siempre— por medio del método de recurrencia. Si para simplificar aceptáramos que el gasto anual de trabajo vivo $v_t + m_t$ es constante y que durante el año inicial no existían los medios de producción, obtendremos el siguiente sistema de ecuaciones que expresan el valor de la producción durante los años subsiguientes:

$$\begin{aligned}
x_0 &= v_0 + m_0, \\
x_1 &= a_c x_0 + (v_0 + m_0) = (v_0 + m_0)(1 + a_c), \\
x_2 &= a_c x_1 + (v_0 + m_0) = (v_0 + m_0)(1 + a_c + a_c^2), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

De una manera general:

$$(3.24)\quad x_t = a_c x_{t-1} + (v_0 + m_0) = (v_0 + m_0)(1 + a_c + a_c^2 + \ldots + a_c^t).$$

De la resolución general (3.24) resulta que el proceso investigado se dirige hacia el equilibrio si $|a_c| < 1$, lo que sucede en nuestro caso, puesto que $0 < a_c < 1$. Entonces

$$(3.25)\quad \lim_{t \to \infty} x_t = (v_0 + m_0) \frac{1}{1 - a_c}.$$

De esa manera hemos obtenido la imagen del transcurso durante el proceso marxista de la reproducción. El operador del acoplamiento retroactivo presentado en el modelo (3.25) $\frac{1}{1 - a_c}$ constituye la relación que existe entre el valor del producto y el gasto de trabajo vivo. Como $0 < a_c < 1$, por consiguiente $\frac{1}{1 - a_c} > 1$. Este operador constituye, por lo tanto, un refuerzo que expresa el incremento del valor del producto (en relación al gasto de trabajo vivo) a consecuencia del desgaste de los medios de producción.

Observemos que —de manera similar que en el primer ejemplo— se puede simplificar la investigación de la dinámica de este proceso. Con ese objeto planteamos la premisa de que existe un valor de la producción $\hat{x}_t = \frac{v_0 + m_0}{1 - a_c}$ que corresponde al estado de equilibrio del sistema, y examinaremos la desviación que se aparta del estado de equilibrio:

$$(3.26)\quad \bar{x}_t = x_t - \hat{x}_t = x_t - \frac{v_0 + m_0}{1 - a_c}.$$

Después de efectuar las transformaciones de una manera análoga, como anteriormente, obtenemos la siguiente ecuación diferencial en una forma reducida (homogénea):

$$(3.27)\quad \bar{x}_t = a_c \bar{x}_{t-1}.$$

La solución de esta ecuación es

$$(3.28)\quad \bar{x}_t = a_c^t \bar{x}_0.$$

De la solución (3.28) dimana que las desviaciones que se apartan del estado de equilibrio se liquidan por sí mismas; o sea, el

proceso está estabilizado porque $0 < a_c < 1$. El proceso marxista de la reproducción se puede ilustrar gráficamente de un modo similar, como se ha hecho tratándose del proceso de la formación del ingreso nacional, en base al multiplicador de Keynes.

La premisa que habíamos aceptado anteriormente sobre la constancia del gasto de trabajo vivo $v_0 + m_0$ no es necesaria. Es posible demostrar —aun mediante un método gráfico— que los resultados fundamentales de las reflexiones no se alterarán si el gasto de trabajo vivo cambia año con año. En el diagrama correspondiente la línea que corresponde a la producción $x_t = a_c x_{t-1} + (v_t + m_t)$ no será entonces paralela a la recta de gastos de los medios de producción $a_c x_{t-1}$; a pesar de que $0 < a_c < 1$, el proceso se dirigirá

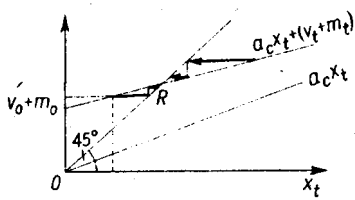


FIG. 24.

hacia el equilibrio, como lo demuestra la figura 24. La línea que corresponde a la producción durante el año t no tiene que ser una línea recta mientras logre seccionar la recta que atraviesa el lugar donde comienza el sistema de coordenadas y que está inclinada en la dirección positiva del eje x, en ángulo de 45°.

TEXTO DEL PRIMER BORRADOR DEL AUTOR SOBRE LA ORDENACIÓN DEL CONTENIDO DE SU OBRA (TOMO I)

Esbozo de la economía política

I. Primera parte: Premisas generales.

Capítulo I. Economía política como ciencia:

1. Objeto de la economía política. Conceptos preliminares.
2. El modo de producción y las formaciones sociales. Concepción materialista de la historia.
3. Las leyes económicas.
4. El método de la economía política.
5. El principio de una economía racional.
6. Los diferentes conceptos del objeto y método de la economía política.
7. El condicionamiento social y la función social del conocimiento económico en relación a la objetividad de la economía política como ciencia.

Capítulo II. Leyes generales de la reproducción social:

1. Características generales del proceso productivo.
2. El proceso reproductivo; la reproducción simple y ampliada.
3. El producto social y la utilidad.
4. La renovación de los medios de producción y la acumulación. Las inversiones y su eficacia.
5. Leyes de equilibrio de la reproducción simple y ampliada.
6. La productividad del trabajo, los estímulos económicos y el desarrollo de las fuerzas productivas.

Capítulo III. La producción natural y la producción mercantil:

1. La cooperación y la división del trabajo.
2. El alcance de la sociedad productiva. El intercambio y la mercancía.
3. La producción mercantil. El mercado.

4. El intercambio indirecto y el dinero.
5. La ley de la demanda y la oferta. El proceso de la formación de los precios.
6. La ley del valor como regulador de la producción mercantil, así como también como una expresión de relaciones mercantiles de la producción. La fetichización de las relaciones de producción.
7. Modos de actuar la ley del valor.
8. Las leyes generales de la circulación monetaria.
9. La posibilidad de efectuar la medición de la producción mercantil y monetaria. Transformación de los ingresos en utilidades. La racionalización de la actuación económica.
10. La reproducción social, valoritaria y monetaria. El ingreso social. La amortización y la acumulación.
11. Las inversiones en relación al ingreso nacional.

Capítulo IV. La teoría económica de las formaciones sociales:

1. Leyes económicas generales y leyes económicas específicas de la formación social. La ley económica básica de la formación social.
2. Las relaciones de producción y las relaciones de distribución. El papel de la producción mercantil y las leyes del valor en diferentes formaciones sociales.
3. El trabajo productivo y no productivo. Utilidades primarias y derivadas.
4. Las clases sociales y las capas sociales. Las diferentes fuentes de privilegio social. Diversas formas de lucro.
5. La coacción extraeconómica en las diferentes formaciones sociales. El papel económico del Estado.
6. Las formaciones sociales en relación a los estímulos económicos.

Anexo I. Esquema general de la reproducción en la economía natural y mercantil.

Anexo II. La teoría de la demanda y de la oferta.

Anexo III. La teoría de la formación de los precios en condiciones de competencia y de monopolio.

Anexo IV. Investigación econométrica de los procesos de mercado.

II. Segunda parte: Economía política del capitalismo.
   A) Formaciones sociales precapitalistas y el surgimiento del modo de producción capitalista.
   B) El capitalismo de la libre competencia.
   C) El capitalismo monopolista.
   D) Límites históricos del modo de producción capitalista.

III. Tercera parte: Economía política del socialismo.
   A) Las tareas históricas del período de la construcción del socialismo.
   B) Leyes económicas del período de transición. La creación de las leyes económicas socialistas.
   C) La ley del crecimiento no uniforme de la economía socialista.
   D) La interacción recíproca de la economía socialista y la economía capitalista durante el período de transición.
   E) Economía política de la sociedad socialista.

TEXTO DEL SEGUNDO BORRADOR REDACTADO POR EL AUTOR ORDENANDO EL CONTENIDO DE ESTA OBRA (TOMO I)

Esbozo de la economía política

I. Parte primera: Premisas generales.

Capítulo I. Economía política como ciencia:

1. Objeto de la economía política. Conceptos preliminares.
2. El modo de producción y las formaciones sociales. La concepción materialista de la historia.
3. Las leyes económicas.
4. El método de la economía política.
5. El principio de la economía racional.
6. La concepción diferente del objeto y del método de la economía política.
7. La economía política en relación a la praxeología.
8. El condicionamiento social y la función social del conocimiento económico en relación a la objetividad de la economía política como ciencia.

Capítulo II. El proceso social de la producción y de la reproducción:

1. Características generales del proceso productivo.
2. El proceso reproductivo. La reproducción simple y ampliada.
3. El producto social y el ingreso neto.
4. La renovación de los medios de producción y la acumulación. Las inversiones y su eficacia.
5. Las leyes de equilibrio de la reproducción simple y de la reproducción ampliada.
6. La productividad del trabajo. Los estímulos económicos y el desarrollo de las fuerzas productivas.

Capítulo III. La producción mercantil y la ley del valor:

1. La cooperación y la división del trabajo.
2. El alcance de la comunidad productiva. El intercambio y la mercancía.

3. La producción mercantil. El mercado.
4. El intercambio indirecto y el dinero.
5. La ley de la demanda y la oferta. El proceso de la formación de los precios.
6. La ley del valor como regulador de la producción mercantil y como expresión de las relaciones mercantiles de producción. Fetichización de las relaciones de producción.
7. Los modos de acción de la ley del valor. La competencia y el monopolio.
8. Leyes generales de la circulación monetaria. El valor y la fuerza adquisitiva del dinero.
9. La posibilidad de efectuar la medición de la producción mercantil y monetaria. La transformación de los ingresos en utilidades. La racionalización de la acción económica.
10. La reproducción social valoritaria y monetaria. El ingreso social. La amortización y la acumulación.
11. Las inversiones en relación al ingreso nacional.

Capítulo IV. La teoría económica de las formaciones sociales:

1. Leyes económicas generales y leyes económicas específicas para la formación social. La ley económica fundamental de la formación social.
2. Las relaciones de producción y las relaciones de distribución. El papel de la producción mercantil y las leyes del valor en diferentes formaciones sociales.
3. El trabajo productivo y no productivo. Utilidades primarias y derivadas.
4. El trabajo adicional y el producto excedente. Las clases sociales y las capas sociales. Diversas fuentes del privilegio social. Las diversas formas de explotación.
5. Coacción extraeconómica en las diferentes formaciones sociales. El papel económico del Estado.
6. Las formaciones sociales en relación a los estímulos económicos.

Anexo I. Esquema general de la reproducción en la economía natural y mercantil.

Anexo II. La teoría de la demanda y de la oferta.

Anexo III. La teoría de la formación de los precios en condiciones de competencia y de monopolio.

Anexo IV. La investigación econométrica de los procesos de mercado.

II. Parte segunda: La economía política del capitalismo.

A) Las formaciones sociales precapitalistas y el surgimiento del modo de producción capitalista.

B) El capitalismo de la libre competencia.

C) El capitalismo monopolista.

D) Los límites históricos del modo de producción capitalista.

III. Parte tercera: La economía política del socialismo.

A) Las tareas históricas del período de la construcción del socialismo y la dependencia de éstas de las condiciones históricas de la descomposición del capitalismo en los países individualmente.

B) Las leyes económicas del período de transición. La formación de las leyes económicas del socialismo.

C) La ley del crecimiento no uniforme de la economía socialista.

D) Interacción recíproca de la economía socialista y la economía capitalista durante el período de transición.

E) Economía política de la sociedad socialista.

TEXTO DEL PRIMER BORRADOR SOBRE EL CONTENIDO DEL SEGUNDO TOMO DE LA OBRA

Tomo II. El proceso social de la producción
La teoría general de las formaciones sociales

I. El proceso social de la producción. La reproducción y el crecimiento económico.
II. Las leyes técnicas y de balance de la producción.
I. El proceso productivo social. La reproducción simple y ampliada.
II. Las leyes técnicas y de balance de la producción.
Anexo: La teoría matemática de la reproducción.
III. La acumulación y el crecimiento económico.
Anexo: Las relaciones cuantitativas durante el proceso del crecimiento económico.
IV. La producción mercantil y el intercambio mercantil y monetario.
El mercado y la ley de la demanda y de la oferta.
Las relaciones de producción durante la producción mercantil. La ley del valor.
Anexo: La teoría matemática del proceso de mercado y el análisis estadístico de éste.
Anexo: El proceso social de la reproducción durante la producción mercantil.
V. El plusproducto y las clases sociales.
VI. La producción y la distribución. La estructura general de las formaciones sociales.

TEXTO DEL SEGUNDO BORRADOR SOBRE EL CONTENIDO DEL SEGUNDO TOMO DE LA OBRA

El proceso productivo y las formaciones sociales

Capítulo I. El proceso social de la producción y de la reproducción.

La producción y la división social del trabajo. El trabajo, los medios de producción y el producto. Los gastos y el ingreso. La productividad del trabajo social y el rendimiento de los gastos. El rendimiento directo e indirecto. La cooperación y la división del trabajo. La organización, la instrumentalización y la automatización del proceso productivo. La renovación de los medios de producción y de la fuerza de trabajo. El proceso de la reproducción. La reproducción de las relaciones de producción. El ingreso global y el ingreso neto, la restitución de los medios de producción. Los medios duraderos y rotativos. Las dimensiones de las magnitudes económicas. El equipamiento efectivo y el nivel de la renovación. La reproducción simple y ampliada. La economía de cálculo. La acumulación y el incremento de ocupación. El papel de las reservas durante el proceso reproductivo. La acumulación en relación al rendimiento del trabajo social. Las vías del desarrollo de las fuerzas productivas sociales.

Capítulo II. Las leyes técnicas y de balance de la producción.

La interdependencia de los resultados y los gastos de la producción. Los medios de producción y los medios de consumo. Las condiciones de equilibrio de la reproducción simple. Los esquemas multiseccionales de equilibrio. La reproducción ampliada y el proceso del crecimiento económico. Las condiciones de equilibrio de la reproducción en escala ampliada. Los coeficientes de producción y los coeficientes de la estructura del proceso productivo. El equilibrio y el crecimiento: Gargantas estrechas, *bottlenecks*. El análisis cibernético del proceso reproductivo. La reproducción del capital fijo y los problemas de ésta. La renovación en relación al desarrollo de las fuerzas productivas. El rendimiento de los gastos y la potencia productiva. El crecimiento de la potencia productiva en relación al problema de la renovación. Los ritmos del incremento de la producción y la interdependencia de éstos.

Apéndice: La concepción matemática de la teoría de la reproducción.

Capítulo III. La acumulación y el crecimiento económico.

La división del ingreso neto en producto indispensable y producto adicional. Modos de utilización del producto excedente, el consumo y la acumulación. Los tipos de acumulación, las inversiones y el incremento de las reservas. Las inversiones productivas y las improductivas. Las inversiones productivas en relación al incremento del ingreso global. La efectividad global de las inversiones productivas. Los coeficientes de inversión. Las inversiones productivas y los gastos adjuntos del capital circulante. Las inversiones productivas directamente y las inversiones productivas indirectamente (infraestructura). El efecto de la inversión en el tiempo: el ciclo de inversión y la congelación de los medios. La influencia que ejerce la reducción del ciclo de inversión sobre la eficacia de la inversión. La acumulación y el incremento de ocupación, la capacidad de absorción de trabajo de las inversiones y de la producción. La acumulación, las inversiones y los cambios del rendimiento del trabajo social.

Anexo: Las relaciones cuantitativas en el proceso del crecimiento económico.

Capítulo III. La producción mercantil y el intercambio mercantil y monetario.

La producción privada en condiciones de división social del trabajo. La transformación del producto en mercancía. El intercambio de mercancías. El valor de uso y el valor de cambio. El dinero y su función en el intercambio. El mercado y el precio. El proceso de circulación de las mercancías. Las condiciones de equilibrio del proceso de circulación. La función del dinero en la circulación; la circulación de la moneda. Las perturbaciones del proceso de circulación; crisis de circulación.

Anexo: El análisis econométrico de los procesos de mercado.

Capítulo IV. Intercambio mercantil y monetario en relación a las relaciones de producción. La ley del valor.

El intercambio mercantil y monetario como un lazo entre los productores. Intercambio de los productos del trabajo. El trabajo individual y el trabajo social. La enajenación del producto de su productor. El trabajo concreto y el trabajo abstracto. El valor del producto. Intercambio mercantil y monetario como intercambio del valor. Las condiciones del intercambio; la competencia y el monopolio. La formación del precio en relación al valor de la mercancía. El valor como expresión y medida de la relación de la producción social que se manifiesta en el intercambio mercantil y monetario. La ley del valor. El valor del dinero. La producción espontánea y regulada. La ley del valor como regulador de la producción espontánea. El fetichismo mercantil y la exposición de éste. La ley del valor como base de la equivalencia de gastos y resultados en el proceso productivo. La transformación de las categorías naturales en categorías económicas valoritarias: del gasto en costo, del ingreso en utilidad, de la renovación en amortización, del ingreso neto en valor agregado, del producto indispensable en el costo de la fuerza del trabajo, del excedente producto en utilidad neta (o bien en plusvalía). Las categorías económicas valoritarias hacen posible la agregación. Los agregados sociales en el proceso productivo: el producto social (global), la amortización global, el ingreso social.

Anexo: El proceso productivo social durante la producción mercantil.

Capítulo V. El proceso productivo y reproductivo en las formaciones sociales particulares.

El papel del trabajo en los modos de producción particulares. Las relaciones de propiedad en cuanto al producto excedente. La relación clasista y las clases sociales. El modo de apropiación del plusproducto y los tipos de relación clasista. Las llamadas clases intermedias. Las clases sociales y los conjuntos sociales legales (los estratos sociales, las castas), la clase y la profesión. La polaridad de la relación clasista. La relación clasista como relación económica objetiva. Cuestión de la conciencia de clase. Las clases sociales, las llamadas clases intermedias en relación al producto social. La distribución primaria y secundaria. La distribución secundaria se efectúa fuera del proceso productivo. El papel de la superestructura en la distribución secundaria del producto social. Las capas sociales y su participación en la distribución del producto social. La función de las capas sociales en la formación social: las capas y las clases.

INDICE DE NOMBRES

Ackoff, R. L., 141.
Allen, R. G. D., 83, 128.
Arkwright, R., 45.
Arnoff, E. L., 141.
Ashby, R., 29, 31.

Baran, P., 65.
Bartlett, M., 140.
Bauer, O., 38, 211.
Bernal, J. D., 33, 37, 38.
Böhm-Bawerk, E., 57, 170.
Bortkiewicz, W., 140.
Bosiakowski, Z., 96.
Boyarski, A., 63, 75, 140, 148.
Brentano, L., 44.
Bujarin, M., 66.

Carlson, S., 95.
Cartwright, E., 45.
Clark, P. S., 220.
Clark, J. B., 95, 170.
Cort, H., 46.
Cox, D. R., 140, 164.
Crompton, S., 45.
Czechowski, T., 154, 220.

Chenery, W. B., 220.
Churchman, C. W., 141.

Darby, A., 46.
Davidson, B., 132.
Dobb, J. L., 167.
Dobb, M., 44.
Domanski, B. I., 25.
Dorfman, R., 220.
Dunajewski, H., 169.

Engels, F., 38, 41, 49, 50, 51, 52, 63, 64, 210, 211.
Euler, L., 127, 181.
Evans, S. C., 75.

Fiedorowicz, M., 114.
Fisz, M., 180.
Franklin, B., 21.
Frechet, M., 140.

Gottl-Ottilienfeld, F. von, 21.
Gozulow, A., 102.
Grannt, J., 139.
Greniewski, H., 26.
Grossman, H., 211.
Gutenberg, E., 103.

Halley, E., 139.
Hargreaves, J., 45.
Heaton, H., 38.
Hegel, J. G., 28.
Herskovits, M. J., 50, 64, 65.
Hicks, J. R., 128.
Hilferding, R., 211.
Holzer, J., 154.
Hornauer, W., 25.

Jaglom, A. M., 167.
Jantzen, I., 105.
Jenofonte, 44.
Jevons, W. S., 75.

Kay, J., 45.
Kelly, W., 45.
Kendall, M. G., 180.
Keynes, J. M., 236, 242.
Klapkowski, B., 204.
Knapp, F. G., 139, 154.
Knight, F. H., 170.
Koopmans, T. C., 83.
Kotarbinski, T., 18, 21, 22, 24, 28, 36, 52.
Kozniewska, L., 140.
Kruszczynski, S., 95, 96.
Krzywicki, L., 50, 53, 54, 64, 108.
Kula, W., 45.

Kurtz, E. B., 143.

Lagrange, J. L., 10.
Lange, O., 7-12, 14, 18, 47, 49, 54, 64, 71, 75, 79, 80, 83, 108, 114, 128, 129, 140, 211, 220, 229, 231, 238, 239.
Laplace, P. S., 139, 175.
Lenin, V. I., 95, 108, 211.
Leontief, W., 219, 220.
Lexis, W., 139, 154.
Liebig, J., 94.
Lotka, J., 140, 172.
Luxemburgo, R., 211.

Markuzon, F. D., 78.
Marshall, A., 95, 106, 107, 170.
Marx, C., 15, 28-20, 22, 26-28, 33-34, 38, 41-49, 51-53, 55-56, 58-65, 69-70, 78, 81, 94-95, 97, 101, 133-139, 164, 207, 211, 213-215, 229, 233, 237-239, 242.
Maszkin, N. N., 44, 131.
Menger, K., 95.
Minc, B., 78.
Mitscherlich, E. A., 94.
Mondslay, H., 46.
Morgan, L. H., 64.
Morgenstern, O., 95.
Mumford, L., 29.

Needham, J., 33.
Niemczynow, W., 210, 211, 220.
Nyklinski, A., 204.

Pareto, V., 95.
Pichler, P., 114.
Pollock, F., 34, 37.

Quesnay, F., 210-211.

Ricardo, D., 23, 94.
Robertson, D. H., 140.

Samuelson, P. A., 220.
Saxer, W., 140.
Say, J. B., 71.
Schneider, E., 95, 105, 125.
Schultz, H., 129.
Schumpeter, J., 38-39, 95.
Smith, A., 23, 43.
Smith, W. L., 140.
Solow, R. M., 220.
Sraffa, P., 9.
Stieltjes, T. J., 189.
Stigler, G. J., 125.
Strumilin, S., 16, 45, 59, 78.
Sulmicki, P., 220.
Süssmilch, J. P., 139.
Szczedrin, 59.
Szulc, S., 143.
Szuszerin, P., 63.

Thurnwald, R., 50.
Toynbee, A., 38.
Tugan-Baranowski, M., 211.
Turgot, A., 94.

Volterra, V., 140, 172.

Walras, L., 79, 95.
Watt, J., 31, 45-46.
Weber, M., 44, 131.
West, E., 94.
Wicksell, K., 95, 125.
Wicksteed, P. H., 75, 95, 125.
Wiener, N., 30, 37, 38.
Wieser, F., 170.

Yamada I., 220.

Zagórski, J., 210.
Zeuner, G., 139, 154.
Zeuthen, F., 105.

INDICE ANALITICO

Acción indirecta, 27-41.
— en la automatización, 30-31.
— en la mecanización, 27-31.
Acoplamiento retroactivo, 30-31, 215-216, 230, 232, 234-236.
— de compensación, 215-217.
— de acumulación, 30-32.
Acumulación originaria, 44.
— en la reproducción ampliada, 194.
Almacenamiento, 17.
Análisis de la actividad, 84, 129.
Antigua formación social, 132.
Armonización de la estructura del equipo técnico, 104-107, 109, 115-117.
Artesanía, 40, 50.
Asociación industrial, 75.
Automatización, 30, 40.
— y la mecanización, 33-34.
— minimalización de la intervención, 36-37.
— y la revolución industrial, 37-40.
— y el desarrollo, 35.
— y el cambio de carácter del trabajo, 35-40.
— parcial, 34.
— de actividad, 34.
— de conjunto (entera), 35.
— de coordinación, 34-35.
— en la Edad Media, 33.
— en condiciones del capitalismo, 38.
Avería, 134, 136, 148, 149.

Balance de la fuerza de trabajo, 200, 202.
— medios de consumo, 206.
— medios de producción, 198-203, 207.
Balance de potencias productivas, 202, 203, 207.
— de inversiones y resultados de la producción, 197-199, 219, 236-240.
— productivo y de demanda, 205-207.
— en el sistema ramal (en forma vectorial y en esquema estructural), 220-222.
— de transferencias interramales, 219-222.
Bienes, 13, 17, 225.
— de consumo, 24, 64.
— de producción, 62-64.
Bienes durables de consumo, 217-218.

Cálculo de tipo valor-dinero, 109, 125-127.
Carácter colectivo de trabajo y de medios de producción, 71-73.
Cartel, 50.
Cibernética, 30.
— análisis cibernético del proceso de reproducción, 215-217, 222, 229-242.
Ciclo de renovación (restitución), 152, 159, 164.
— y ciclo coyuntural, 163-165.
— y desigualdad de los períodos de utilización, 154.
— y distribución planificada, 165.
— constante inextinguible, 182.
— sofocación, 185-189.
Coeficiente de acumulación del capital variable, 234-235.
— de los medios de producción, 233-234.
Coeficiente de duración, 142-143, 171.
— de supervivencia, 145.
— de los desembolsos del trabajo vivo, 229, 231, 232-235.

— de los medios de producción, 229, 231, 232, 233-234, 238-240.
— de la renovación, 166, 184.
— de sofocación de las oscilaciones, 185-189.
— de decremento (eliminación), 143-147, 149-150, 161-162, 171, 177.
— mortandad, 144-145.
Coeficientes técnicos de la producción, 78-80, 113.
— equipamiento de la producción, 98, 113, 114-117.
— de la estructura armónica (disarmónica), 103, 115-116.
— y la técnica de la producción, 103-104.
Colonato, 132.
Comercio, 51.
Comunidad aldeana, 49.
Comunidad primitiva, 47-48.
Concepción materialista de la Historia, 13.
Condiciones de balance, 199-200, 203.
— totalidad, 207-208.
— del equilibrio de las transferencias interseccionales, 213.
— en la forma simplificada, 214-215.
— en el esquema de bloque, 215.
Condiciones de distribución, 9-10, 13.
— económicas, 9-10, 13.
— de cooperación, 9-10, 53-55.
— de producción, 9-10, 13.
— definición, 52-53.
— dos tipos, 52-53.
— y las propiedades materiales del proceso de la producción, 15-16.
— materiales y de valor en el capitalismo y en el socialismo, 225-227.
— de mercancías, 48-49.
— de propiedades, 53, 55.
Conjunto referente al desembolso de trabajo, 71-73.
— de los medios de producción, 71-73.
— ingreso, 71-72.
Consorcio, 50.
Constante e inextinguible ciclo de la renovación, 182-183.
Consumo puro, 211.
— estructura, 195.
— reproductivo, 211.
Cooperación, 10, 40-42, 46-49, 52.
— relaciones de cooperación, 10, 53.
Coordinación, 40-42, 49.
— actividad en el tiempo, 54-56.
— ecuación de coordinación, 167-170.
— en los modos antagónicos de producción, 52-53.
Crisis, 66.
Cualificaciones, 51-52.
Cumulantes (semivariables o semivariantes), 180.
Cuota de consumo improductivo, 235.
Cuota de desgaste, 59-60, 162-163.

Demografía matemática, 140.
Desarmonía del equipo técnico, 115.
Descubrimientos, historia, 45-46.
Desembolso, 74-75, 94, 87-89, 111, 203.
Desembolso y rendimiento, 74.
— de explotación, 100-101.
— unitario (coeficiente de la producción), 79-82, 113.
— matriz de los desembolsos, 111-112.
— máximo, 102.
— de conservación, 133.
— de reparación, 133.
— reproductivo, 218-219, 222.
— ley de los crecientes desembolsos adicionales, 90-93.
— esquema del desarrollo unitario, 79-81, 87, 96, 98, 100-101.
— sustitución de desembolsos, 87-92, 93-97, 100-101, 107.
— negativo, 91.
Desgaste, 66.
Desgaste de los medios de trabajo, 58-59.
— físico, 57-58.
— medida, 74-75.
— moral (atraso económico), 58-59.

— cuota de desgaste, 59-60, 161-163.
Desigualdades de balance, 201.
Dinero, 50.
— metálico, 51.
Dirección (unipersonal y colegiada), 42-43.
Desproporciones del proceso de reproducción, 195, 196.
— transcurso llano del proceso, 195-196.
— equilibrio, 194-195.
— esquema de bloque, 215-216.
— perturbaciones, 194-195.
División, 13.
— funcional y material (y las condiciones técnicas del proceso de producción), 216-218.
— de global producto social, 208-210.
— de trabajo, 40-41, 42-45, 46-50.
— y el desarrollo de las fuerzas productivas, 48.
División del trabajo y el modo de producción, 47-49.
— internacional, 48.
— social, 48.
— escalones de la, 48.
— consciente y espontánea, 48-50.
— natural, 50.
— tres grandes divisiones del trabajo, 50.
— en la historia de las sociedades, 50.
— en el capitalismo, 49.
— profesional, 50-52.

Eco en la demografía, 153.
— en procesos de renovación, 153.
— atraso económico de los medios de trabajo (desgaste moral), 59, 148.
Economía del capitalismo, 227.
— modo de producción, 41, 45-47, 53.
Ecuación característica, 175-176.
— de coordinación, 177-181.
— de renovación, 150-153, 171-176.
Ecuación de la renovación en el tiempo infinito de utilización, 173-174.
— en el tiempo finito de utilización, 172-173.
— resolución, 174-177.
— en el perfil histórico, 165.
— en el perfil simultáneo, 165.
— en el proceso de reproducción, 174-175.
Ecuaciones de balance de los medios de producción, 199-200.
— de balance de la fuerza de trabajo, 200-201.
Elemento limitante del equipo técnico, 103-104, 115-116.
Equilibrio del proceso de la reproducción, 194-195.
— de trasferencias interseccionales, 213-215.
Empresa de producción, 40, 46-47, 48-49, 105-107.
Ergástulas, 44, 45.
Esclavitud, 53, 131-132.
Escuela austriaca, 71-72, 169-170.
— de los fisiócratas, 23-24.
— neoclásica, 71-72, 169-170.
Espacio euclidiano, 116-117.
Esquema de la reproducción, 210-213.
— de bloque, 215-222, 230-233, 215-236.
— simple, 229-233, 237-239.
— ampliada, 232-237.
Espera en los procesos de renovación, 171.
— en las teorías de las escuelas austriaca y neoclásica, 169-170.
Estabilización del proceso de renovación, 152-157.
— y la desigualdad de los períodos de utilización, 157-159.
Estímulos, 13.
Excedente puro, 210.
— económico, 65.
— de las potencias productivas, 203.
— de la fuerza de trabajo, 201.
— de los medios de consumo, 206-207.
Expropiaciones de los campesinos, 45.

Fábrica, 46-47.
— automática, 35-36.
— creación, 45-47.
Factor del tiempo, 240.
Factores de producción, 69-70.
— personales, 69-70.
— materiales, 69-70.
— ley de rendimiento decreciente, 94-97.
— sustitución, 87-92.
— teoría, 70-73.
— unificación, 70-73.
Formaciones sociales, 14-17, 132, 193-195, 211.
Fórmula de Euler, 180-182.
Fuerza productiva del trabajo, 77-78.
— fuerza de trabajo, 51.
— balance, 198, 201-203.
— definición, 61-62.
— renovación, 61-65, 131-132, 208-209.
— desgaste, 61-63.
Fuerzas productivas, 13-15, 45-46, 64-65, 78, 93-95.
Función de la renovación, 173, 180-185.
— frecuencia de la renovación, 174.
— proceso de la extinción del ciclo de la renovación, 166.
Función de renovación, 175, 180-186.
— de la producción, 125-127, 130.

Gargantas estrechas, 194-196.
Grado de sofocación del ciclo de la renovación, 184-185.

Hipersuperficie, 117.

Instalaciones auxiliares (utensilio), 21-22.
Instrumentalización del proceso de trabajo, 22.
Instrumentos, 21.
— en la máquina, 26-28.
Instrumentos de trabajo, 21.
— y la transformación del medio ambiente, 22.
— desarrollo de las fuerzas productivas, 22.
— en la máquina, 27.
Integral de Stieltjes, 189.
Intensidad de decremento, 146-150, 171-173.
— de mortandad, 146.
Intensidad del decremento, 145-149.
Interpretación praxeológica de las leyes económicas, 11, 93, 107, 100-108.
— principios praxeológicos de acción, 14, 15, 97, 101-108.
Invigilancia pura, 37.
— intervencionista, 37.
Isocuanta, 124, 125.

Ley del rendimiento decreciente (decreciente productividad), 93-95, 126, 128.
— nivel decreciente de sustitución de los rendimientos, 88, 90, 95.
— en el término matemático, 123.
— nivel creciente de sustitución de los rendimientos, 87-89, 95, 127, 128.
— en el término matemático, 122.
— crecientes desembolsos adicionales, 90-93, 128.
— en el término matemático, 122.
— de la sustitución de los desembolsos, 87.
— en la interpretación geométrica, 116-118.
— de los rendimientos, 87-88.
— en la teoría neoclásica de la producción, 122-123.
— carácter praxeológico, 14, 92-97, 100-108.
Ley de sustitución, considerando el equipo técnico, 100-101.
— de la armonía, 104-105.
— de concentración de la producción, 105-106.
— de la causalidad, 27-28.
Leyes económicas, 14-16.
— y las formaciones sociales, 15.
Leyes económicas y las propiedades materiales del proceso de producción, 14.

— y los principios praxeológicos de acción, 14.
— y el proceso de la integración recíproca del hombre y la naturaleza, 14.
— y las relaciones económicas, 15.
— y las que tratan las relaciones de producción, 16.
— clases, 18.
— leyes de técnicas y de balance de la producción, 14-16.

Magnitudes económicas, 73-75.
— físicas, 75.
— su medición, 73-75.
— escalarial, 77.
— vectorial, 76.
Manager, 53.
Mando, 24-26.
Manufacturas, 38, 44, 47.
— imperiales, 45.
— capitalistas, 45.
— magnates (latifundistas), 45.
— en las cuales trabajan los siervos, 45.
Máquina, 25, 28.
Matemática del seguro, 139, 140.
Materias básicas, 19-20.
— materias auxiliares, 19-20.
Materias primas, 19-20.
Matriz, 83.
— de los desembolsos, 111-112.
— de las transferencias interramales, 219, 221.
— de la técnica de producción, 83, 84, 86, 99, 111-113.
Mecanismo, 27, 28, 39, 40.
— en la máquina, 29-31.
Mecanización, 33, 35.
— y el cambio del carácter de trabajo, 36.
Medida de la utilización, 75.
— del desgaste, 75.
Medidas de unidades; *ver* Unidades de medidas.
Medios de consumo.
— Balance, 206-207, 213.
— excedentes, 65-66.
— necesarios, 63-64.
— en la reproducción ampliada, 65-66.
— en varios medios de producción, 193-194.
— de circulación, 58, 59 99, 100-101, 111.
— medidas, 73-75.
— renovación, 132-133.
— del trabajo, definición, 18, 20-23.
— y los órganos del cuerpo humano, 23-25.
— y las fuerzas de la naturaleza, 22-24.
— en el proceso de trabajo, 22-28.
— desgaste físico y moral (atraso económico), 58-59.
— de la producción, 18-22.
— y el producto, 21-23.
— balance, 198-199, 201-202, 213.
— renovación, 60-62, 132-133, 208-209.
— desgaste, 57-60.
— durables, 58, 59, 111.
— conservación, 134-135.
— medidas, 73-75.
— mínima (máxima) dimensión de la utilización, 101-102.
— renovación, 132-133, 134-137.
— período de utilización, 138.
— en la matriz completa de la técnica de producción, 99.
Medios durables en el proceso de producción, 96-98.
— deterioros, 133-134.
— destrucción, 134-136.
Métodos actuariales, 139, 140.
Minimalización de la intervención, 28, 29.
— y la automatización, 35-37.
Modo de la producción, 45, 49-52.
— y la unificación de los factores productivos, 69-70.
Momentos de la distribución de la probabilidad, 179, 180.
Multiplicador de Keynes, 242.

Necesidades biológicas y socio-culturales, 61-63.
Normas de las funciones de la máquina, 31, 33.

— técnicas, 80.
Nudo de acción cerrada, 216-217.

Objetos de lujo.
Objetos de trabajo, 18-22.
— y los medios de trabajo, 21-23.
— desgaste, 53.
— de lujo, 207.
Obrero colectivo y parcial, 41.
— asalariado, 45.
— siervo, 45-47.
Operador de proporcionalidad, 230, 232, 235, 236.
Oscilación dominante, 185.

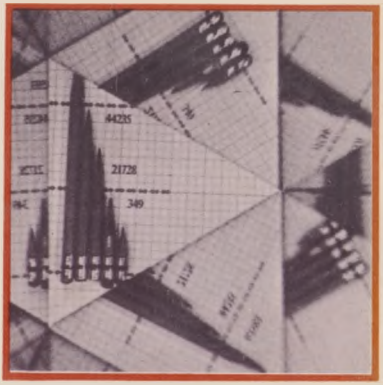
Período del ciclo de la renovación, 189-190.
— de la producción, 56-57, 167, 169.
— en la teoría de Böhm-Bawerk, 56-57.
— de trabajo, 55-56.
— de utilización del capital fijo, 59-60, 133, 137-139, 152.
— en la renovación por etapas, 138.
— y ciclo de la renovación, 158-159.
Personal administrativo, 42.
Plan de la economía nacional, 226.
Planificación de la economía social, 49.
— del proceso de la renovación, 162-163.
Potencia productiva, 101-102, 114-117.
— y la armonización de la estructura del equipo técnico, 105-107, 115-116.
— balance, 201-203.
— excedente, 202-203.
— grado de aprovechamiento, 101-103.
Praxeología, 11.
Probabilidad de decremento (eliminación), 145-146, 172.
— tabla, 143-144.
— coeficiente, 143-147, 149-150, 161-162, 171, 177.
Probabilidad de duración, 146, 172.
— de eliminación, 146, 172.
Proceso continuo de la renovación, 171-172.
— de saltos, 189-195.
— estabilizado (equilibrado), 164-165.
— en el perfil histórico, 164.
— en el perfil simultáneo, 164.
— ecuación de la renovación, 149-151, 172-178.
— constante e inextinguible ciclo de la renovación, 182, 193.
— teoría (general), 140-141, 170.
— coeficiente de la renovación, 166, 184.
Proceso demográfico, 131.
— ergódigo, 166-167.
— económico, 13.
— de trabajo, 16-17, 18-19.
— de producción, 14, 16-17.
— esquema, 72-73.
— de reproducción, 60-64.
— esquema de bloque, 215-216.
— estocástico, 167.
— técnico, 82-85, 93-97, 128, 129.
— y el equipo técnico, 98-100.
— puro, 83, 84.
— efectivo, 86-87.
— mixto, 84, 118-119.
— indivisible, 106-108.
— infuncional, 86, 100-101.
— divisible (líneal), 85, 90-92, 106-108.
— equivalentes, 86.
— colindantes, 120-121.
— repeticiones múltiples, 104-105.
— en la economía natural y mercantil pecuniaria, 108-109.
— en la teoría neoclásica de la producción, 122-123.
— de la creación de valor en la forma del esquema de bloque, 229-237.
Proceso de renovación uniforme, 156-163, 164-165.
— y el proceso de la producción de los objetos, 167-170.
Proceso social de la producción, 14.
— producto final, 222.
— desembolso reproductivo, 222.

Procesos técnicos continuum (de), 122-123.
Producción, 13, 14, 69, 47.
— y el proceso de trabajo, 16-17, 69.
— adicional, 64-65.
— sectores y ramas, 16-18, 209-211.
— su carácter social, 14.
— conjuntiva, 73, 78, 80, 114-115, 128.
— industrial, 16-17.
— agrícola, 16-17.
— de mercancías, 48-49.
Productividad de los factores productivos, 81.
— del desembolso adicional, 92-93.
— del trabajo, 78, 81-82, 100-101; *ver también* Desembolsos.
Productividad marginal de los factores productivos, 125.
— teoría, 96-97.
Producto, 13, 17, 19.
— excedente, 65-66, 193, 194, 208-209, 233-235.
— global; *ver* Producto global.
— acabado, 19.
— principal y colateral, 73-74.
— final, 114, 219.
— de referencia, 80.
— semielaborado, 19.
Producto social global, 210, 223.
— de la rama, 219.
— en la forma de valor, 229.
Profesión, 50-52.
Programa, 33.
Programación de las funciones de las máquinas, 33.
— simple, 33.
— automática, 32.
Promedio temporal (histórico), 166.
— de fase (de perfil simultáneo), 166.
— período de utilización, 160-162.
— cuota de desgaste, 59-60.
Propiedades de los medios de producción, 52-55.
Propietario de los medios de producción, 52-53.

Red demográfica, 153.
Regulador, 230.
— de Watt, 31.
Regularidades praxeológicas; *ver* Principios praxeológicos de acción.
Relación, 25, 31.
Relaciones cuantitativas en la producción, 66-67, 132.
— materiales y de valor, 225-226.
Rendimiento, 74-75, 76.
— y desembolso, 78.
— y fuerza productiva del trabajo, 78.
— su carácter escalar y vectorial, 76-78.
Renovación como el proceso estocástico, 167.
— de generaciones, 62-64.
— de fuerza de trabajo, 61-65, 129, 131.
— de medios de producción, 60-65, 132-133, 193, 196, 202.
Renta nacional, 236.
Reparación, 123-148.
— corriente, 134-135.
— capital, 134-137.
— desembolsos, 132-133.
Reproducción, 60-64, 131.
— de la población, 62-64.
— principales sectores, 210-213.
— de los productos y de valores, 214.
— ampliada, 65-66, 193-194, 209-210, 214, 222.
— en la interpretación cibernética, 232-237.
— el esquema de bloque del proceso de la reproducción, 215-216.
— desembolso social de la reproducción, 222.
— teoría, 210-211.
— en aspecto estructural, 209-210.
— en el capitalismo, 209-211.
— estrechada, 66, 209-210.
Reserva de los medios de producción, 65.
— definición, 75.
Revolución industrial, 37-40, 45.

Selección de los procesos técnicos, 108-109.

Oskar Lange
Economía política



El presente libro (que ha sido traducido al francés, inglés, italiano y portugués) constituye una obra singular pues, como afirma Lange, integra "un tratado sintético de mis estudios en diversos dominios de la ciencia económica" que no comprendieron solamente la teoría, sino también la economía agregada general, la econometría y la estadística. Se trata, pues, de una síntesis madura y luminosa escrita por uno de los economistas más destacados de nuestra época que, además, participó en forma activa en la reestructuración de su país según las normas de la actividad centralmente planificada. El propósito fundamental del autor es mostrar cómo pueden establecerse las leyes que determinan el desarrollo de la moderna sociedad económica y de qué manera pueden ser utilizadas para someter el fenómeno a la voluntad humana. Lange considera que la economía es el principal instrumento para lograr, mediante la planificación, el máximo beneficio posible para los pueblos: de ahí su contexto marcadamente social y profundamente humano, que reviste un especial interés para Hispanoamérica, dados sus añejos problemas de subdesarrollo y su posición particular frente a la política de coexistencia pacífica.

Oskar Lange (1904-1965) se distinguió desde su juventud por su incansable actividad y su lucidez científica. Formó parte de la Academia de Ciencias de Polonia, fue profesor en las universidades de Chicago y Varsovia, presidente de la Comisión Económica de las Naciones Unidas para Europa (1957-1959).

Diseño: Carlos Haces / Fotografía: Carlos Franco.

Fondo de Cultura Económica / Serie de Economía